CHAPITRE V : Le champ électrique

La notion de champ a été introduite par les physiciens pour tenter d'expliquer comment deux objets peuvent interagir à distance, sans que rien ne les relie. A la fois la loi de la gravitation universelle de Newton et la loi de Coulomb en électrostatique, impliquent une telle interaction à distance. Il n'y a pas de fil qui relie la terre au soleil; celui-ci exerce son attraction à distance. De même, deux charges électriques s'attirent ou se repoussent dans le vide sans que rien ne les relie, sans aucun support matériel. Pour tenter d'expliquer cela, Michael Faraday a introduit la notion de champ électrique. Si une charge Q_1 a un effet à distance sur une charge Q_2 qui se trouve éloignée, c'est parce que la charge Q_1 met tout l'espace qui l'entoure dans un état particulier : la charge Q_1, de par sa présence, produit en tout point de l'espace qui l'entoure, un champ électrique et c'est l'interaction de ce champ électrique avec la charge Q_2 qui produit la force que cette dernière ressent. Cette notion de champ s'est révélée très utile et très pratique. Elle a pu être utilisée pour décrire d'autres forces fondamentales que la force électrique et elle permet de décrire les phénomènes de manière élégante.

V.1 : Définition du champ électrique

Pour définir le champ électrique en un point de l'espace, on y place une petite charge d'essai positive q et on regarde la force de Coulomb $\overline{\mathrm{F}}$ qui s'exerce sur elle, due à la présence des charges électriques environnantes qui créent le champ électrique. Le champ électrique en ce point est défini comme la force par unité de charge :

$$\boxed{\overline{\mathbf{E}} \equiv \frac{\overline{\mathbf{F}}}{\mathbf{q}}, \qquad \mathbf{q} > 0} \qquad \text{(V.1)}$$

Le champ électrique est donc une grandeur vectorielle. L'unité SI de champ électrique est le newton par coulomb (N/C).

La charge d'essai doit être petite pour qu'on puisse faire l'hypothèse qu'elle ne perturbe pas elle-même le champ électrique environnant.

A une distance r d'une charge ponctuelle Q, le champ électrique est donné par la loi de Coulomb (IV.2) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\,\frac{\mathbf{qQ}}{\mathbf{r^2}} \qquad \mathbf{et} \qquad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{q}} = \mathbf{k}\,\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{r^2}} \tag{V.2}$$

Le champ électrique tout comme la force de Coulomb est radial, il s'éloigne de la charge Q si celle-ci est positive (voir figure V.1.a) et se dirige vers celle-ci si elle est négative (voir figure V.1.b).

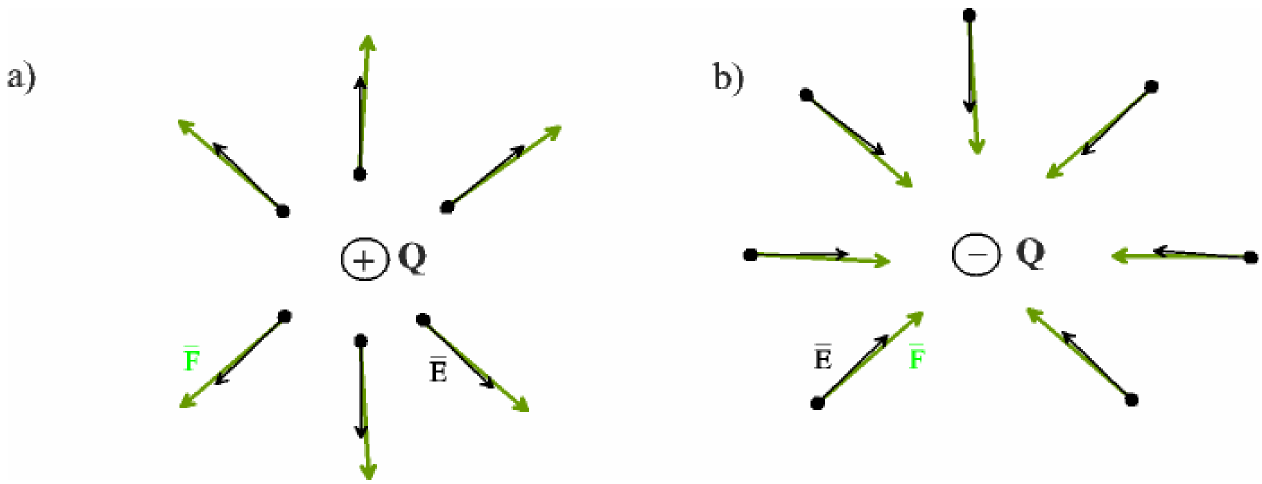


Figure V.1.

En effet, la petite charge d'essai positive q est repoussée par Q si celle-ci est positive, attirée par Q si celle-ci est négative.

Remarque :

Il y a un champ électrique autour de Q même en l'absence de la petite charge d'essai qui sert à le mettre en évidence.

De la définition du champ électrique, il résulte que la force $\overline{F}$ subie par n'importe quelle charge Q placée en un point de l'espace où règne un champ électrique $\overline{E}$, est donnée par :

$$\boxed{\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\overline{\mathbf{E}}} \tag{V.3}$$

D'après cette relation, si la charge Q est positive, la force qu'elle ressent a le même sens que le champ électrique, si elle est négative, elle subit une force de sens opposé au champ électrique (voir figure V.2.a et b).

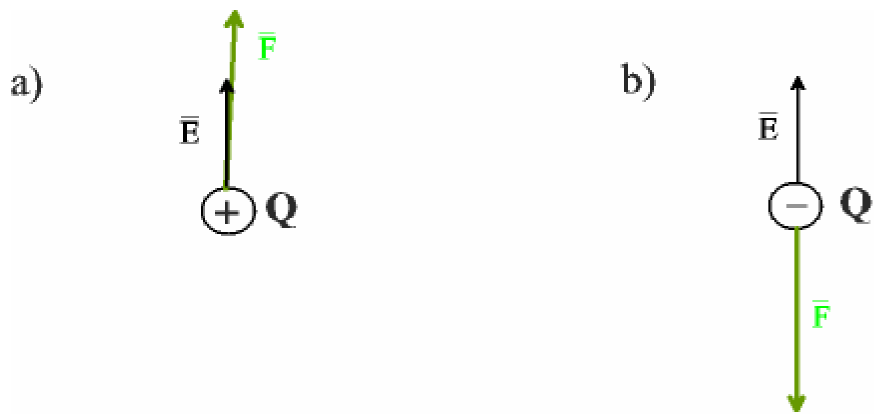


Figure V.2.

Le principe de superposition qui s'applique à la loi de Coulomb (voir section IV.7) s'applique également au champ électrique. Pour calculer le champ créé en un point par un ensemble de n charges Q_i, on détermine d'abord séparément le champ $\overline{E}_1$ dû à Q_1, le champ $\overline{E}_2$ dû à Q_2, etc… Le champ résultant $\overline{E}$ est égal à la somme vectorielle des champs individuels $\overline{E}_i$.

$$\boxed{\overline{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{E}}_1 + \overline{\mathbf{E}}_2 + \ldots + \overline{\mathbf{E}}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{E}}_i} \quad \text{(V.4)}$$

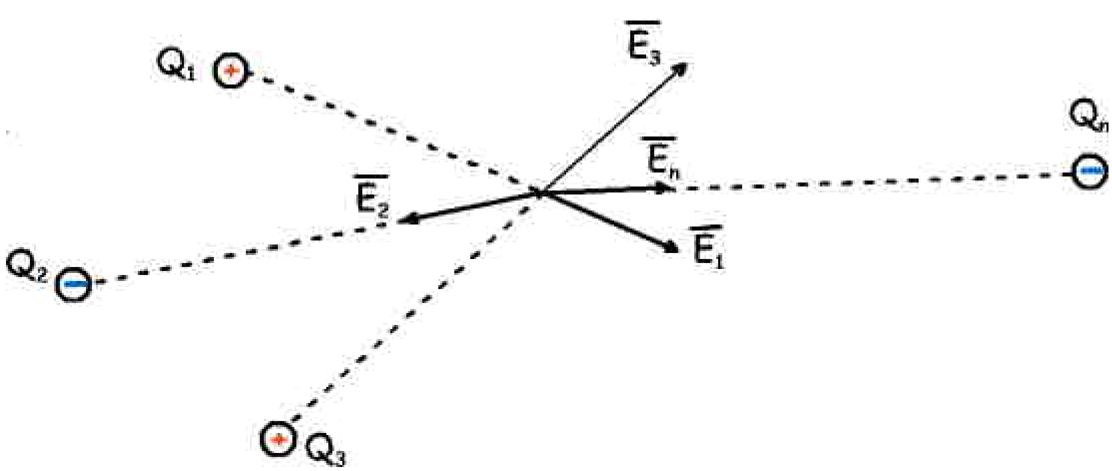


Figure V.3.

En effet:

$$\bar{E} = \bar{F}/q = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n)/q$$

$$= (\bar{F}_1/q + \bar{F}_2/q + \ldots + \bar{F}_n/q) = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \ldots + \bar{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{E}_i$$

V.2 : Le champ électrique dû à une distribution de charges

Dès que le nombre de charges augmente, la relation (V.4) ne permet plus de calculer le champ électrique, les calculs devenant trop complexes. Dans beaucoup de cas on pourra faire l'approximation que la charge électrique est répartie de manière continue dans l'espace et remplacer la somme (V.4) par une intégrale. Le calcul de cette intégrale est grandement simplifié lorsque la distribution de charge est uniforme, c'est-à-dire de même densité partout dans l'espace considéré.

Pour calculer le champ électrique $\bar{E}$, en un point P, dû à une distribution de charge uniformément répartie dans une certaine région de l'espace (voir figure V.4), on divise l'espace en petits morceaux contenant chacun une charge Δq, distants de r du point P.

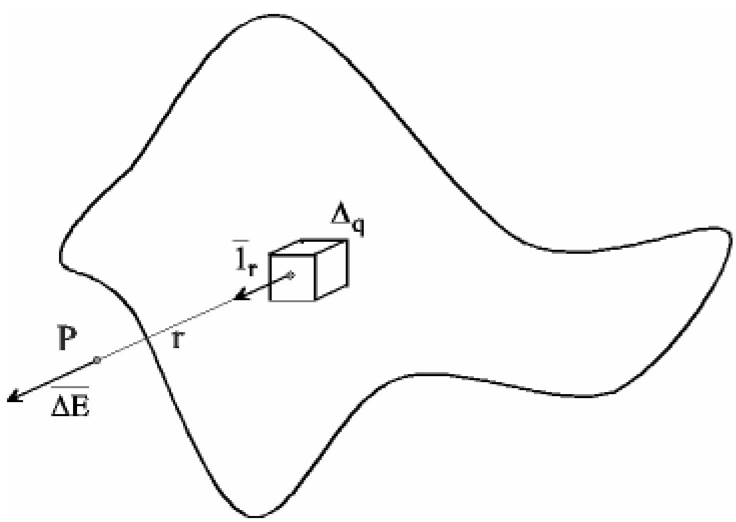


Figure V.4.

La charge Δq a été choisie suffisamment petite pour pouvoir être considérée comme ponctuelle. Dès lors le champ électrique en P dû à Δq, $\overline{\Delta E}$ est donné par la loi de Coulomb :

$$\overline{\Delta E} = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \bar{1}_r , \qquad \text{(V.5)}$$

où $\overline{1}_r$ est un vecteur unité dirigé de Δq vers P. Pour obtenir le champ électrique total en P, on applique le principe de superposition en sommant les champs électriques ΔE dus à toutes les charges Δq contenues dans l'espace considéré :

$$\overline{\mathbf{E}} = \sum \overline{\Delta \mathbf{E}} \qquad \text{(V.6)}$$

ce qui donne en notation différentielle, pour une charge infinitésimale dq (voir (V.5)) :

$$\overline{\mathbf{dE}} = \frac{\mathbf{dq}}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}^2}\, \overline{\mathbf{1}}_{\mathbf{r}} \qquad \text{(V.7)}$$

et pour le champ total (voir (V.6)) :

$$\boxed{\overline{\mathbf{E}} = \int \frac{\mathbf{dq}}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}^2}\, \overline{\mathbf{1}}_{\mathbf{r}}}\,. \qquad \text{(V.8)}$$

V.2.1 : Calcul du champ électrique dû à un plan infini uniformément chargé

Outre qu'il illustre le calcul d'un champ électrique par la relation (V.8), cet exemple nous sera utile pour calculer la capacité d'un condensateur plan et pour comprendre le fonctionnement d'un oscilloscope. Nous allons calculer le champ électrique en un point P situé à une distance L d'un plan comportant une distribution de charge uniforme. Pour caractériser cette distribution de charge définissons la densité surfacique :

$$\sigma \equiv \frac{\mathbf{dq}}{\mathbf{ds}},$$

où dq est la charge infinitésimale contenue sur une surface d'aire infinitésimale ds du plan (voir figure V.5).

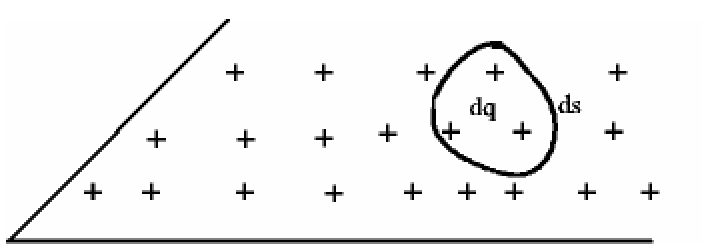


Figure V.5.

La densité surfacique est donc une charge par unité de surface, la même sur tout le plan dans le cas d'une distribution uniforme.

Pour calculer le champ électrique au point P (voir figure V.6), choisissons un système de référence cartésien, Oxyz, dont l'axe z est perpendiculaire au plan et passe par le point P et divisons le plan en petits éléments pour lesquels le champ est aisé à calculer.

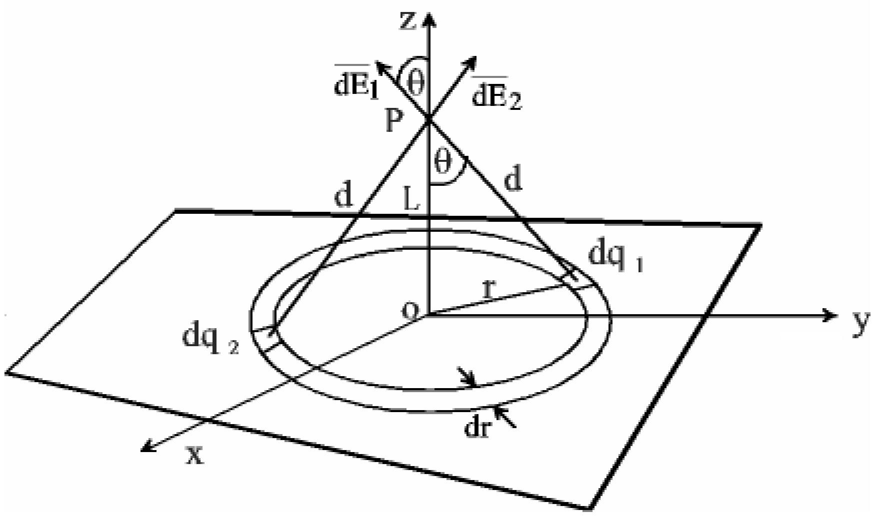


Figure V.6.

Considérons tout d'abord l'anneau de rayon r, d'épaisseur infinitésimale dr, centré sur O. Dès lors, l'aire de cet anneau vaut 2π r dr. Divisons maintenant l'anneau en petits segments de longueur infinitésimale contenant une charge dq et remarquons que le champ en P dû à n'importe laquelle de ces charges dq est le même en module : $dE_1 = dE_2$. En effet toutes ces charges dq sont à la même distance d de P. Par contre leur direction n'est pas la même. Toutefois leurs projections dans le plan Oxy s'annulent deux à deux pour deux charges dq_1 et dq_2 diamétralement opposées. Par conséquent le champ électrique $\overline{dE}$ dû à l'anneau de rayon r est dirigé suivant l'axe Oz et :

$$\overline{\mathbf{dE}} = \frac{\sigma . 2\pi r\, dr}{4\pi \varepsilon_0 d^2} \cos\theta \overline{1_z},$$

où θ est l'angle entre $\overline{dE_1}$, $\overline{dE_2}$, etc… et l'axe Oz, il est le même pour toutes les charges dq_i, par symétrie et vaut :

$$\cos\theta = \frac{L}{d}.$$

Comme de plus, $d = \sqrt{L^2 + r^2}$, on a finalement :

$$\mathbf{dE} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{\mathbf{L\,r\,dr}}{\left(\mathbf{L^2 + r^2}\right)^{3/2}} \tag{V.9}$$

Le champ électrique total en $\overline{E}$ s'obtient en sommant les contributions dE de tous les anneaux formant le plan Oxy, c'est-à-dire en intégrant l'expression (V.9) pour le rayon r de l'anneau allant de zéro à l'infini :

$$\mathbf{E} = \int_0^\infty \frac{\sigma \mathbf{L}}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r\,dr}}{\left(\mathbf{L^2 + r^2}\right)^{3/2}} = \frac{\sigma \mathbf{L}}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{\mathbf{r\,dr}}{\left(\mathbf{L^2 + r^2}\right)^{3/2}} .$$

Le résultat de l'intégrale peut être trouvé dans une table d'intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\mathbf{x\,dx}}{\left(\mathbf{x^2 + L^2}\right)^{3/2}} = \left[\frac{-1}{\left(\mathbf{x^2 + L^2}\right)^{1/2}}\right]_{\mathbf{x=0}}^{\mathbf{x=\infty}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}} .$$

Dès lors, nous avons le résultat important que le champ électrique au voisinage d'un plan infini uniformément chargé vaut :

$$\boxed{\overline{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, \overline{\mathbf{1}}_{\mathbf{z}}} \tag{V.10}$$

Remarquons qu'il ne dépend pas de L ce qui veut dire que le champ électrique est uniforme au voisinage d'un plan uniformément chargé : en tout point il lui est perpendiculaire et a une intensité $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, quelle que soit la distance du point P au plan. Si le plan est chargé positivement, comme nous l'avons supposé implicitement sur la figure V.6, $\overline{E}$ s'éloigne du plan. Si le plan est chargé négativement, $\overline{E}$ se dirige vers le plan (voir figure V.7 a et b).

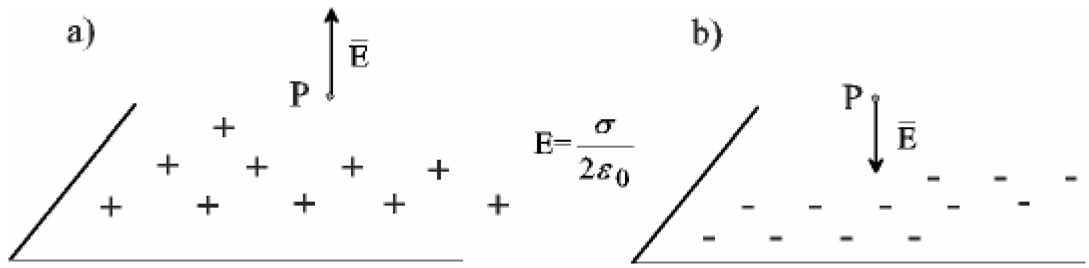


Figure V.7.

V.2.2 : Calcul du champ électrique dû à deux plans parallèles, uniformément chargés de charges opposées

Pour calculer le champ électrique dû à cette configuration, nous allons appliquer le principe de superposition. Le champ électrique dû au plan chargé positivement vaut $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ et s'éloigne de ce plan (voir figure V.8.a), celui dû au plan chargé négativement vaut aussi $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ mais est dirigé vers ce plan (voir figure V.8.b).

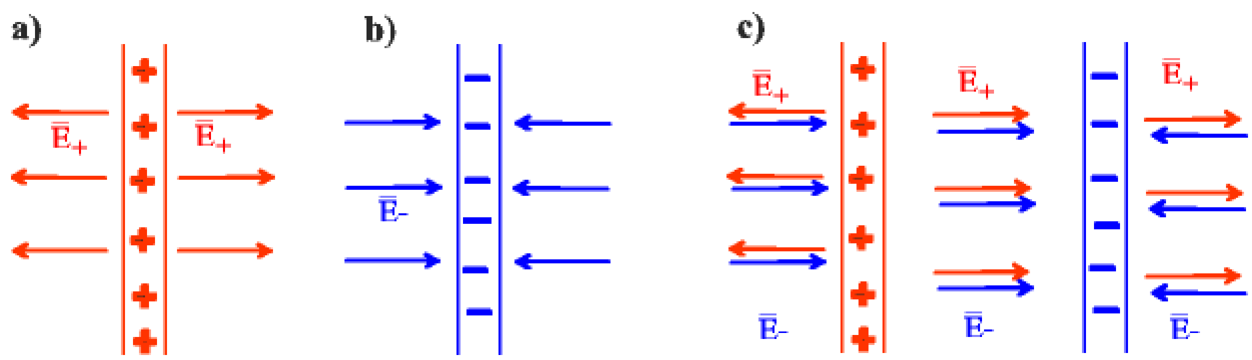


Figure V.8.

La figure V.8.c. illustre la superposition des champs $\bar{E}_+$ et $\bar{E}_-$ dus au plan chargé positivement et au plan chargé négativement. On constate qu'à l'extérieur des deux plans, à gauche et à droite de la figure, les deux vecteurs sont de sens opposés; étant de même intensité $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, ils s'annulent : à l'extérieur de deux plans de charges opposées, le champ électrique est nul. Entre les deux plaques, les deux vecteurs ont même sens et s'ajoutent pour donner un champ électrique double :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{(V.11)}$$

Il est dirigé de la plaque positive vers la plaque négative (voir figure V.9).

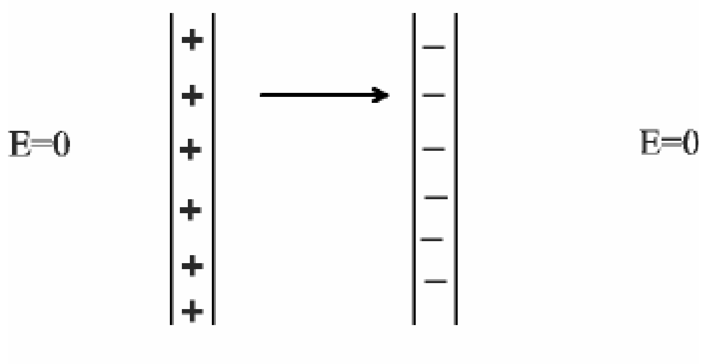


Figure V.9.

Remarquons que ces résultats obtenus pour des plans infinis, restent valables pour des plans finis pourvu qu'on soit suffisamment loin des bords.

V.3 : Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique

Lorsqu'on désire étudier le mouvement d'une particule de charge q et de masse m dans un champ électrique $\overline{E}$, il suffit tout simplement d'appliquer la 2ème loi de Newton, $\overline{F} = m\overline{a}$, et d'exprimer le fait que la force est celle due au champ électrique, $\overline{F} = q\overline{E}$, ce qui donne :

$$\mathbf{q\overline{E} = m\overline{a}} \qquad \text{(V.12)}$$

ou encore :

$$\mathbf{\overline{a} = \frac{q}{m}\,\overline{E}} \qquad \text{(V.13)}$$

Une fois déterminée l'accélération à l'aide de la relation ci-dessus, on est ramené à un problème de cinématique comme ceux traités dans le chapitre I.

Remarquons que pour appliquer la 2ème loi de Newton, la force qui y intervient est la force totale qui s'exerce sur la particule et qu' en toute rigueur il aurait fallu tenir compte, dans la relation (V.12), du poids de la particule, $m\overline{g}$. Toutefois, les particules chargées ont généralement une masse tellement petite que le poids peut être négligé vis-à-vis de la force de Coulomb. C'est notamment le cas pour une charge élémentaire telle que l'électron ou le proton. Calculons l'intensité des deux forces mises en jeu dans le cas d'un électron, qui a une masse de $9,1 \times 10^{-31}$ kg, et est accéléré par un champ de $2,0 \times 10^{4}$ N/C :

$$\mathbf{mg = (9,1 \times 10^{-31}\ kg) \times (9,81\ m/s^2) = 8,9 \times 10^{-30}\ N}$$

$$\mathbf{qE = (1,6 \times 10^{-19}\ C) \times (2,0 \times 10^{4}\ N/C) = 3,2 \times 10^{-15}\ N}$$

$$\mathbf{mg/qE \approx 3 \times 10^{-15}}$$

et mg est donc bien négligeable par rapport à qE. Ceci reste vrai dans le cas d'un proton dont la masse est à peu près 2000 fois plus grande que celle de l'électron.

Exemple :

Un électron se trouve dans un champ uniforme de $2,0 \times 10^{4}$ N/C entre deux plaques parallèles de charges opposées, situées à 2 cm l'une de l'autre. Immobile au départ, il se trouve à proximité de la plaque négative. Une fois accéléré, il passe par un minuscule trou dans la plaque positive (voir figure V.10). Quelle vitesse a-t-il lorsqu'il passe par le trou ?

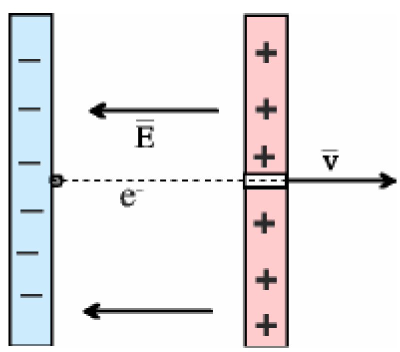


Figure V.10.

Nous avons vu en (V.2.2), que loin des bords de telles plaques, le champ électrique est perpendiculaire aux plaques et dirigé de la plaque positive vers la plaque négative. Par contre la force subie par l'électron :

$$\mathbf{\overline{F} = q\overline{E} = -e\overline{E}}$$

est dirigée en sens opposé étant donné que sa charge est négative. L'électron va bien se diriger vers le trou avec une accélération d'intensité a, donnée par la relation (V.13) :

$$\mathbf{a = \frac{e}{m}\ E = \frac{(1,6\times10^{-19}\ C)}{(9,1\times10^{-31}\ kg)}\times\left(2,0\times10^{4}\ N/C\right) = 3,5\times10^{15} m/s^{2}}$$

Il parcourt une distance x = 2,0 $\times 10^{-2}$ m avant d'atteindre le trou et part avec une vitesse initiale nulle. Dès lors l'application de la relation (I. 10), valable pour un MRUA, donne :

$$\mathbf{v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2\times\left(3,5\times10^{15}\ m/s^{2}\right)\times\left(2,0\times10^{-2}\ m\right)} = 1,2\times10^{7}\ m/s}.$$

Dès qu'il a franchi le trou, l'électron garde cette vitesse qui reste constante puisqu'en dehors des plaques le champ électrique et donc l'accélération sont nuls.

V.4 : Exercices

1. Un proton (m_p = 1,67 10^{-27} kg) immobile se trouve en suspension dans le champ gravitationnel à proximité de la surface de la terre et dans un champ électrique uniforme $\overline{E}$. Quelle est la grandeur et la direction de $\overline{E}$? (R : 10^{-7} NC^{-1} ; 90°).

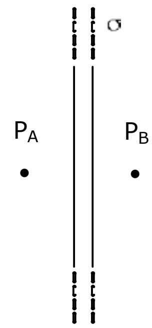
2. Déterminez le champ électrique au point où se trouve une charge de 0,5 µC sur laquelle s'exerce une force $\overline{F} = (3\,\overline{1}_x - 5\,\overline{1}_y)\times10^{-3}N$. (R : $\left(6\overline{1}_x - 10\overline{1}_y\right)\times10^{3}NC^{-1}$).

3. Quelle doit être la charge portée par une particule de masse égale à 2 g pour qu'elle reste stationnaire lorsqu'elle est placée dans un champ électrique dirigé verticalement vers le bas d'intensité 500 NC^{-1} (R : -0,4 10^{-4} C).

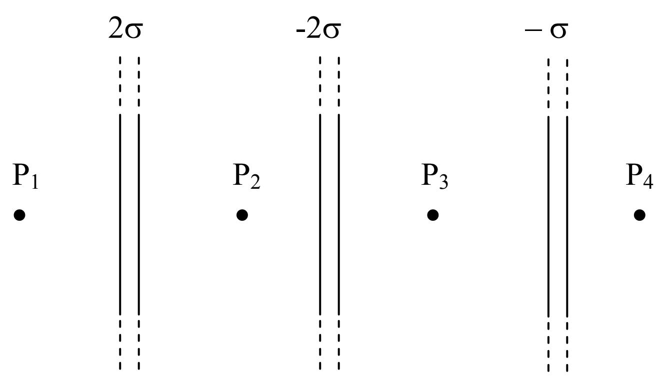
4. Une charge de 2,5 10^{-8} C est placée dans un champ électrique uniforme dirigé verticalement vers le haut dont l'intensité est de 5 10^{4} NC^{-1}. Quel est le travail de la force électrique agissant sur la charge quand celle-ci se déplace a) de 45 cm à droite ; b) de 80 cm vers le bas ; c) de 260 cm vers le haut avec un angle de 45° par rapport à l'horizontale.
(R : 0 J ; -10^{-3} J; 2,3 10^{-3} J).

5. Examen d'août 2006:

a) Que vaut le champ électrique au voisinage d'une plaque infinie chargée uniformément sachant que la densité de charges surfacique vaut σ = + 20µC/m^2 ? Pour préciser la direction de ce champ électrique, dessiner le vecteur $\bar{E}_\sigma$ aux points P_A et P_B situés de part et d'autre de la plaque :



b) En vous servant du résultat obtenu en (a), calculez le champ électrique résultant aux points P_1, P_2, P_3 et P_4 situés dans les différentes régions délimitées par trois plaques parallèles infinies de densités de charges surfaciques uniformes 2σ, -2σ et -σ comme illustré ci-dessous :



Dessinez les vecteurs $\overline{E_1}$, $\overline{E_2}$, $\overline{E_3}$ et $\overline{E_4}$ aux points P_1, P_2, P_3 et P_4 afin d'en préciser le sens.

(R: (a) $E\sigma = 1{,}13 \times 10^6$ N/C, perpendiculaire à la plaque, s'en éloignant (b) $E_1 = 1{,}13 \times 10^6$ N/C, vers la droite;$E_2 = 5{,}65 \times 10^6$ N/C , vers la droite: $E_3 = 1{,}13 \times 10^6$ N/C, vers la droite;$E_4 = 1{,}13 \times 10^6$ N/C, vers la gauche)