

CHAPITRE X : Les condensateurs

Les condensateurs permettent d'emmagasiner des charges électriques et donc de l'énergie électrique. Un condensateur est constitué de deux conducteurs placés à proximité l'un de l'autre, mais sans qu'il y ait contact entre eux. La figure X.1.a offre un exemple typique de condensateur consistant en une paire de plaques parallèles, d'aire A , situées à une faible distance d l'une de l'autre ; on les appelle les armatures du condensateur.

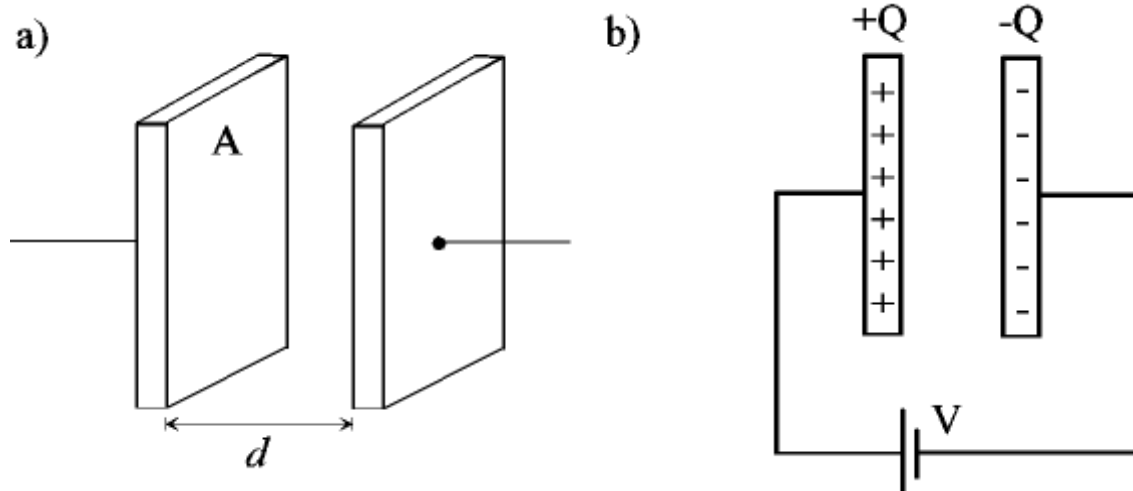


Figure X.1.

Lorsqu'on applique une tension aux armatures d'un condensateur, par exemple à l'aide d'une pile (voir figure X.1.b), il s'électrise rapidement : l'armature reliée à la borne positive de la pile porte une charge $+Q$ tandis que celle reliée à la borne négative de la pile porte une charge égale et opposée $-Q$. Ceci résulte de ce que des électrons provenant de l'électrode négative de la pile s'écoulent vers l'armature du condensateur à laquelle elle est reliée par un fil conducteur. Cette armature portant une charge $-Q$ repousse les électrons de l'armature opposée par induction et ceux-ci rejoignent l'électrode positive de la pile qui les attire ; cette armature porte une charge $+Q$. Dans les schémas de circuits électriques, on représente les condensateurs par :



X.1 : La capacité d'un condensateur

On constate que pour un condensateur donné, la charge Q portée par ses armatures est proportionnelle à la différence de potentiel V qu'on y applique. La constante de proportionnalité de cette relation, C , est appelée capacité du condensateur :

$$C \equiv \frac{Q}{V} = \text{constante} \quad (\text{X.1})$$

L'unité du système SI pour la capacité est le farad (F) ; c'est la capacité d'un condensateur qui porte 1 coulomb sur ses armatures lorsqu'on lui applique une différence de potentiel d'un volt :

$$1 \text{ F} \equiv 1 \text{ C} / \text{V} \quad (\text{X.2})$$

La capacité est une constante propre à chaque condensateur. Sa valeur dépend de la taille, de la forme, de la position relative des deux conducteurs qui le constituent, ainsi que de la substance isolante, appelée diélectrique, qui sépare éventuellement les deux armatures.

Remarque :

Contrairement à ce que peut suggérer à première vue la relation (X.1), la capacité ne dépend ni de V , ni de Q : si l'une de ces quantités est doublée, l'autre l'est aussi de manière à garder le rapport et donc C constant.

On peut déterminer la capacité d'un condensateur de façon expérimentale à partir de la relation (X.1), en mesurant la charge Q de l'une de ses armatures, après l'avoir soumis à une différence de potentiel connue V .

Dans le cas de condensateurs ayant une forme géométrique simple, la capacité peut se calculer. Prenons par exemple le condensateur à armatures parallèles, séparées par du vide, représenté sur la figure X.2.

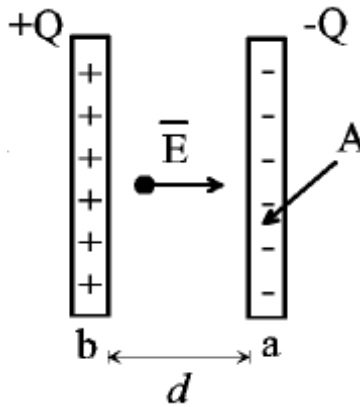


Figure X.2.

Ses plaques d'aire A portent une charge $\pm Q$ et sont séparées par une distance d qu'on suppose faible par rapport aux dimensions des armatures. Dès lors on peut faire l'approximation que les plaques sont infinies et le champ électrique qui règne entre celles-ci vaut $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ et est dirigé de la plaque positive vers la plaque négative (voir chapitre V).

Dès lors :

$$E = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

D'autre part, d'après les relations (VI.8) et (VI.10), nous avons

$$V_{ba} = V_b - V_a = Ed, \quad (\text{X.3})$$

ce qui conduit à :

$$V_{ba} = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

et donne :

$$C \equiv \frac{Q}{V_{ba}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \text{ pour un condensateur à armatures } \quad (\text{X.4})$$

parallèles séparées par du vide

On voit qu'effectivement, la capacité ne dépend ni de Q , ni de V , seulement de l'aire des plaques et de la distance entre elles, ainsi que du milieu qui sépare les deux plaques. En effet, nous

verrons à la section suivante que lorsqu'on place un isolant entre les deux plaques, il faut remplacer ϵ_0 , la permittivité du vide, par ϵ , la permittivité de l'isolant.

X.2 : Rôle des diélectriques dans un condensateur

La plupart des condensateurs renferment une feuille de matériau isolant (papier, plastique, etc ...), appelé diélectrique, qui sépare leurs armatures, et cela pour différentes raisons. D'abord les diélectriques empêchent plus efficacement que l'air ou le vide, les charges de passer d'une armature à l'autre, ce qui aurait pour effet de décharger le condensateur. La présence d'un diélectrique permet d'appliquer de plus hautes tensions avant de provoquer la décharge du condensateur. Elle permet aussi de rapprocher les armatures sans risquer qu'elles se touchent, ce qui accroît la capacité (voir relation (X.4)). Enfin, on a constaté expérimentalement que lorsqu'un diélectrique remplit l'espace compris entre les armatures d'un condensateur, sa capacité augmente d'un facteur κ ($\kappa > 1$), appelé constante diélectrique :

$$C = \kappa C_0, \quad (X.5)$$

où C_0 désigne la capacité du condensateur lorsqu'il y a le vide entre ses armatures et C celle du même condensateur avec un diélectrique de constante κ entre ses armatures. La valeur de κ varie avec la nature du diélectrique et se mesure expérimentalement. Le résultat de ces mesures se trouve consigné dans des tables. Quelques valeurs sont données à titre d'exemple dans le tableau X.1.

Matériau	Constante diélectrique (κ)
vide	1,0000
air	1,0006
papier	3 – 7
porcelaine	6 – 8
eau	80

Tableau X.1.

Dans le cas d'un condensateur à armatures parallèles, séparées par un diélectrique de constante diélectrique κ , on obtient en combinant les relations (X.4) et (X.5) :

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}, \text{ pour un condensateur à armatures parallèles (X.6).}$$

On pose :

$$\epsilon = \epsilon_0 \kappa \quad (\text{X.7})$$

que l'on appelle la permittivité du diélectrique.

L'augmentation de la capacité d'un condensateur dont les armatures sont séparées par un diélectrique provient de la polarisation de ce dernier. Certains électrons atomiques, attirés par la plaque positive, se déplacent légèrement vers celle-ci de telle sorte que bien que le diélectrique soit globalement neutre, la position moyenne des charges négatives est légèrement déplacée par rapport à la position des charges positives, attirées elles par la plaque négative (voir figure X.3).

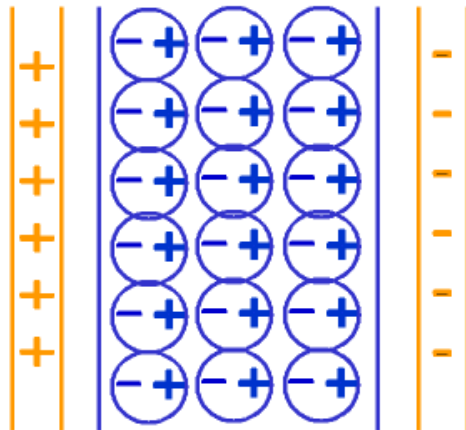


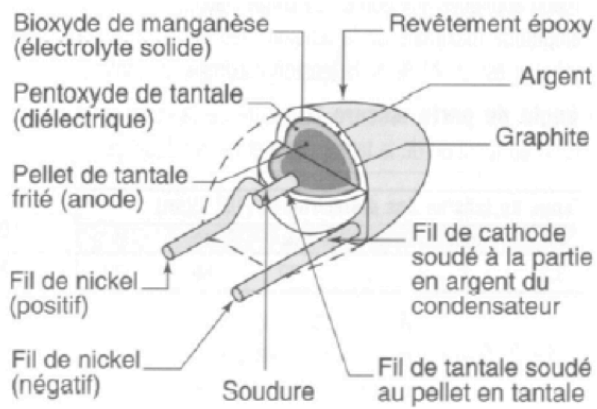
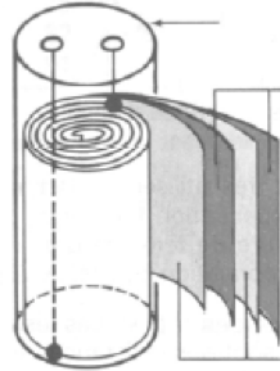
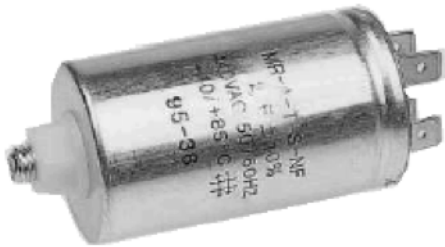
Figure X.3.

Les molécules polarisées donnent lieu à un champ électrique dirigé de leur charge + vers leur charge -, de sens opposé à celui créé par les plaques chargées. Par conséquent le champ électrique entre les plaques diminue ainsi que la différence de potentiel entre les plaques si celles-ci ne sont pas connectées et que les charges ne peuvent pas s'échapper :

$$\begin{array}{ll} Q \rightarrow Q & \text{constant} \\ V \searrow & \text{diminue} \\ C \equiv \frac{Q}{V} \nearrow & \text{augmente} \end{array}$$

Si les plaques sont connectées à une pile lorsqu'on introduit le diélectrique, la pile maintient V constant et c'est la charge portée par les plaques qui va augmenter.

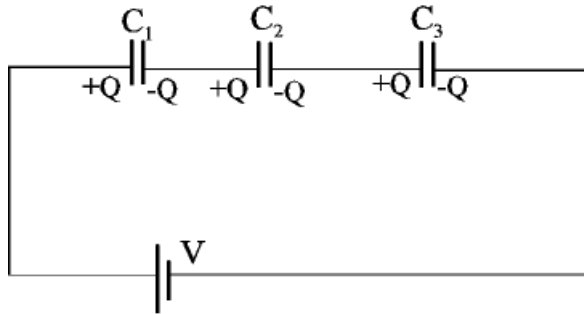
Exemples de condensateurs



X.3 : Les condensateurs en série et en parallèle

Tout comme les résistances, les condensateurs peuvent être associés en série ou en parallèle (voir figures X.4.a et b).

a) condensateurs en série :



b) condensateurs en parallèle :

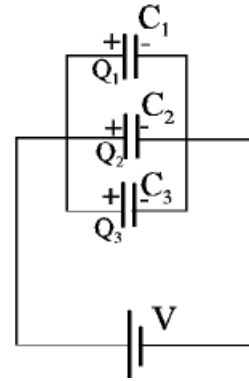


Figure X.4.

Lorsque les condensateurs sont branchés en série, ils portent nécessairement tous la même charge Q . En effet, si une charge $+Q$ s'écoule de l'électrode positive de la pile sur l'armature gauche du premier condensateur, il apparaît, par induction, une charge $-Q$ sur l'autre armature. Comme cette dernière est connectée à l'armature gauche du deuxième condensateur par un fil conducteur, il apparaîtra une charge $+Q$ sur cette dernière. En effet les deux armatures connectées par un fil conducteur forment un conducteur unique, isolé du monde extérieur ; la charge totale doit donc y rester nulle. De proche en proche, les condensateurs placés en série se chargent donc de la même charge : $+Q$, pour l'armature gauche, $-Q$, pour l'armature droite. La différence de potentiel aux bornes de chacun des condensateurs vaut par conséquent :

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

La loi des mailles donne :

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

Si C est la capacité de l'ensemble formé par les trois condensateurs en série, nous avons donc :

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3},$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}, \quad \text{pour des condensateurs en série} \quad (X.8)$$

Lorsque les condensateurs sont branchés en parallèle, la différence de potentiel à leurs armatures est la même :

$$V_1 = V_2 = V_3 = V.$$

D'autre part, la charge totale Q qui s'est écoulée des électrodes de la pile vaut :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

où Q_1 , Q_2 et Q_3 sont les charges portées par les armatures de chacun des trois condensateurs, ceci en raison de la conservation de la charge. Si C est la capacité de l'ensemble formé par les trois condensateurs en parallèle :

$$CV = C_1 V + C_2 V + C_3 V.$$

En divisant les deux membres par V , il vient :

$$C = C_1 + C_2 + C_3, \quad \text{pour des condensateurs en parallèle} \quad (X.9)$$

X.4 : L'énergie électrique emmagasinée par un condensateur

Un condensateur emmagasine une quantité d'énergie électrique égale au travail accompli pour le charger, par exemple à l'aide d'une pile. Supposons qu'à un instant donné, la charge déjà accumulée sur les armatures soit q . Dès lors, la différence de potentiel entre les armatures vaut q / C . Le travail nécessaire pour faire passer une charge infinitésimale dq de l'armature négative à l'armature positive, via la pile est :

$$dW = (q / C) dq.$$

Le travail total W , pour charger un condensateur non chargé avec une charge Q s'obtient en intégrant :

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Ce travail est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle électrique, U_E . Comme on a la relation $Q = CV$, où V est la différence de potentiel de la pile, l'énergie potentielle électrique peut s'écrire sous trois formes différentes :

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

(X.10)

X.5 : Les circuits RC

Les circuits dont nous avons parlé jusqu'à présent, alimentés par une pile, étaient des circuits parcourus par des courants continus. Lorsqu'on inclut un condensateur dans un circuit alimenté par une pile, le courant varie en fonction du temps pendant la charge et la décharge du condensateur, ensuite il devient nul dans les branches où se trouve un condensateur.

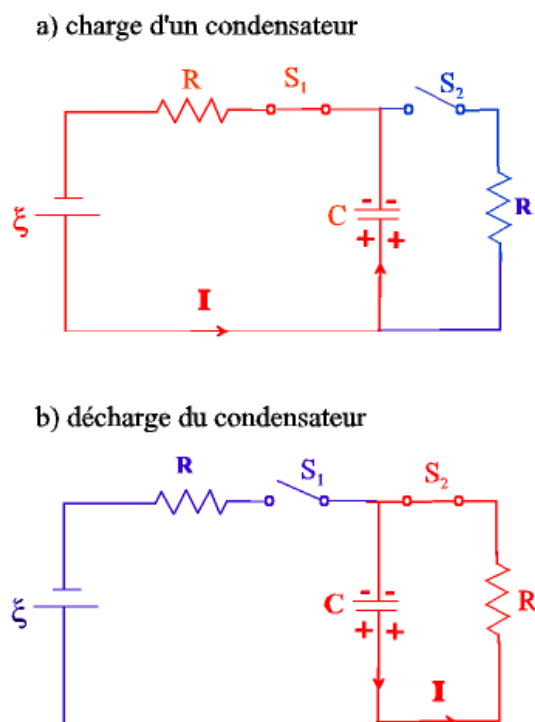


Figure X.5.

X.5.1 : La charge du condensateur

Supposons que le condensateur de la figure X.5 soit initialement non chargé ($Q_0 = 0$) et que les deux interrupteurs, S_1 et S_2 soient ouverts. Aucun courant ne circule dans aucune branche du circuit car il n'y a pas de maille fermée : le condensateur reste non chargé.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur S_1 , on se trouve en présence d'un circuit à une maille, comportant une différence de potentiel ξ , fournie par la pile (voir figure X.5.a). Par conséquent un courant I s'établit, s'écoulant de la borne positive de la pile vers la borne négative. Ce courant amène des électrons sur l'armature supérieure du condensateur qui prend une charge $-Q$ tandis que l'armature inférieure prend une charge $+Q$, des électrons rejoignant la borne positive de la pile. La loi des mailles nous permet d'écrire qu'à tout instant :

$$\xi = V_R + V_C = RI + \frac{Q}{C}. \quad (\text{X.11})$$

Comme le courant qui circule accroît la charge du condensateur, on peut écrire :

$$I = + \frac{dQ}{dt}, \quad (\text{X.12})$$

ce qui donne l'équation différentielle suivante, en remplaçant dans (X.11) :

$$C\xi - Q = RC \frac{dQ}{dt},$$

ou encore, en séparant les variables Q et t :

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{C\xi - Q}.$$

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$\frac{t}{RC} = -\ln(C\xi - Q) + k,$$

où k est une constante d'intégration fixée par les conditions initiales. En $t = 0$, $Q = 0$; dès lors, nous avons :

$$0 = -\ln(C\xi) + k ,$$

ce qui donne :

$$\ln\left(\frac{C\xi - Q}{C\xi}\right) = -\frac{t}{RC} ,$$

En prenant la fonction inverse du logarithme et en réarrangeant les termes, on trouve :

$$Q = Q_f (1 - e^{-t/RC}), \quad (\text{X.13})$$

avec $Q_f = C\xi$ (voir figure X.6.a).

Ce résultat permet de voir que la charge Q du condensateur, qui était nulle au départ, tend vers une valeur finale $Q_f = C\xi$, lorsque le temps tend vers l'infini. La quantité RC porte le nom de constante de temps du circuit. En effet, elle a les dimensions d'un temps :

$$[RC] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{C}{C/s} = s .$$

Elle représente le temps requis pour que le condensateur atteigne une charge $Q = Q_f (1 - e^{-1}) = 0,63 Q_f$, ou 63% de la charge finale Q_f .

Ainsi, le produit RC constitue une mesure de la vitesse à laquelle le condensateur accumule de la charge.

D'après la relation (X.13), il semble que le condensateur n'atteigne jamais la charge maximale Q_f : il atteint 86% de cette valeur en $2 RC$, 95% en $3 RC$, 98% en $4 RC$, etc ...

Par exemple si $R = 30 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,20 \text{ }\mu\text{F}$, la constante de temps vaut

$(3,0 \times 10^4 \Omega) \times (2,0 \times 10^{-7} \text{ F}) = 6,0 \times 10^{-3} \text{ s}$. Le condensateur atteint 98% de sa charge maximale en moins de 1/40 de seconde.

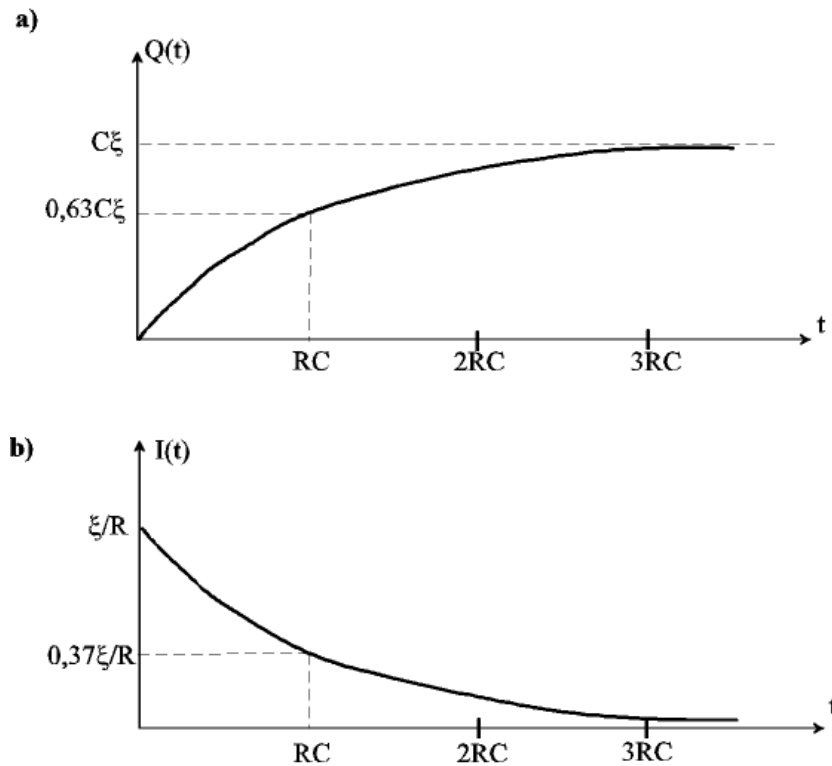


Figure X.6.

Pour obtenir l'intensité du courant qui charge le condensateur, il suffit de combiner les relations (X.12) et (X.13) :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\xi}{R} e^{-t/RC}. \quad (\text{X.14})$$

Ainsi, à l'instant $t = 0$, le courant est maximum et vaut ξ/R . Il décroît ensuite de manière exponentielle, avec la constante de temps RC , de sorte qu'il ne vaut plus que $1/e \approx 0,37$ de sa valeur initiale au bout d'un temps RC . Il tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini (voir figure X.6.b).

X.5.2 : La décharge du condensateur

Supposons que le condensateur du circuit de la figure X.5 ait eu le temps de se charger complètement et porte donc la charge initiale $Q_0 \approx C\xi$. Le courant est devenu pratiquement nul. On ouvre l'interrupteur S_1 et à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur S_2 . On se trouve en présence d'un circuit à une maille comportant une différence de potentiel $V_C = \frac{Q}{C}$, fournie par le condensateur (voir figure X.5.b). Par conséquent, un courant I s'établit, s'écoulant de l'armature

chargée positivement du condensateur, vers celle chargée négativement, en sens inverse du courant de charge. Ce courant amène des électrons de la plaque négative à la plaque positive, au travers de la résistance R. La loi des mailles nous permet d'écrire qu'à tout instant :

$$V_C = V_R,$$

ou encore :

$$\frac{Q}{C} = RI. \quad (\text{X.15})$$

Cette fois, le courant qui circule fait diminuer la charge du condensateur et :

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad (\text{X.16})$$

ce qui donne l'équation différentielle suivante, en remplaçant dans (X.15) :

$$Q = -RC \frac{dQ}{dt},$$

ou encore, en séparant les variables Q et t :

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{Q}.$$

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$-\frac{t}{RC} = \ln Q + k,$$

où k est une constante d'intégration fixée par les conditions initiales. En $t = 0$, $Q = Q_0$; dès lors :

$$0 = \ln Q_0 + k,$$

ce qui donne :

$$-\frac{t}{RC} = \ln \frac{Q}{Q_0}.$$

En prenant la fonction inverse du logarithme et en réarrangeant les termes, on trouve :

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (\text{X.17})$$

Ce résultat permet de voir que la charge qui valait Q_0 au départ, tend exponentiellement vers zéro avec une constante de temps RC ; après un temps égal à RC, la charge ne vaut plus que $\approx 37\%$ de sa valeur initiale (voir figure X.7).

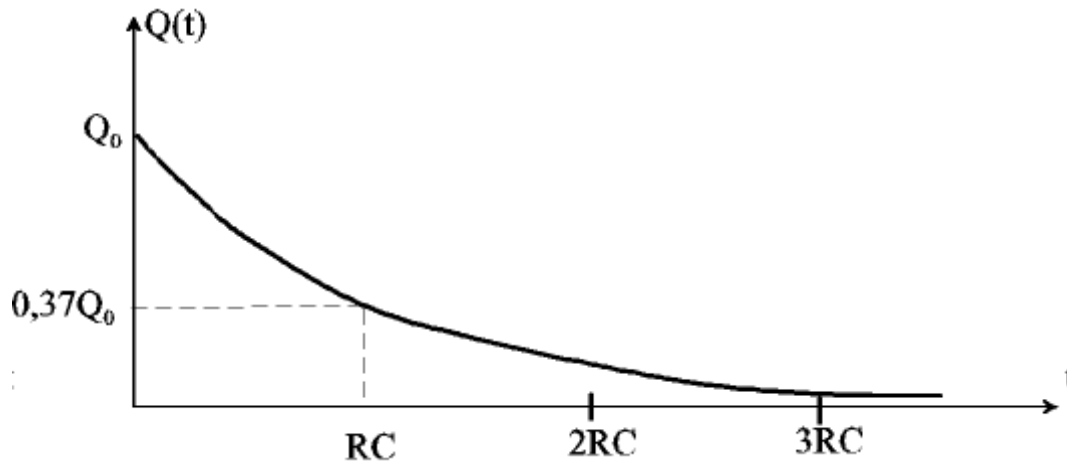


Figure X.7.

Pour obtenir l'intensité du courant qui décharge le condensateur, il suffit de combiner les relations (X.16) et (X.17) :

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad (\text{X.18})$$

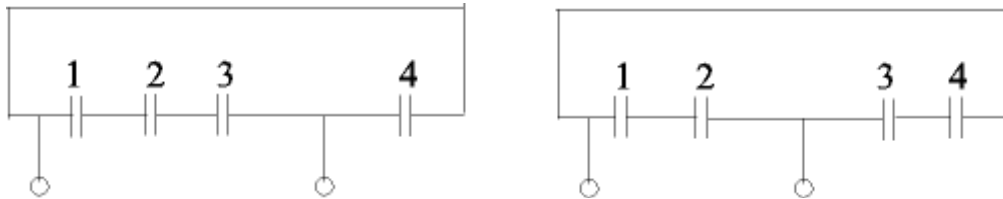
C'est de nouveau à l'instant $t = 0$ que le courant est maximum ; il vaut Q_0 / RC . Il décroît ensuite de manière exponentielle, avec la constante de temps RC , de sorte qu'il ne vaut plus que 37% de sa valeur initiale au bout d'un temps RC , exactement comme pour le courant de charge.

Remarque :

Des relations (X.14) et (X.18), on déduit qu'il ne faut jamais charger un condensateur en le connectant directement aux bornes de la pile et qu'il ne faut jamais décharger un condensateur en court-circuitant ses armatures. En effet, dans ce cas $R \approx 0$ et le courant initial en $1/R$ est énorme, faisant fondre les fils de connexion.

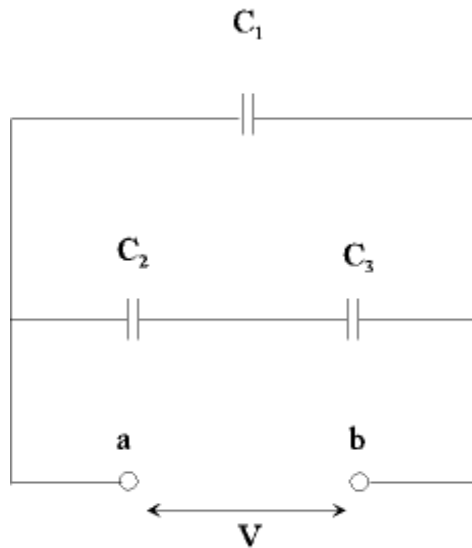
X.6 : Exercices

- Démontrer au moyen de l'analyse dimensionnelle (sans résoudre l'équation du circuit RC) que la quantité RC (où R est une résistance exprimée en Ω et C une capacité exprimée en Farad) possède les dimensions d'un temps.
- Soit deux arrangements différents de 4 condensateurs de capacité C.



Quelles sont les capacités résultantes? (R : $4/3C$ et C).

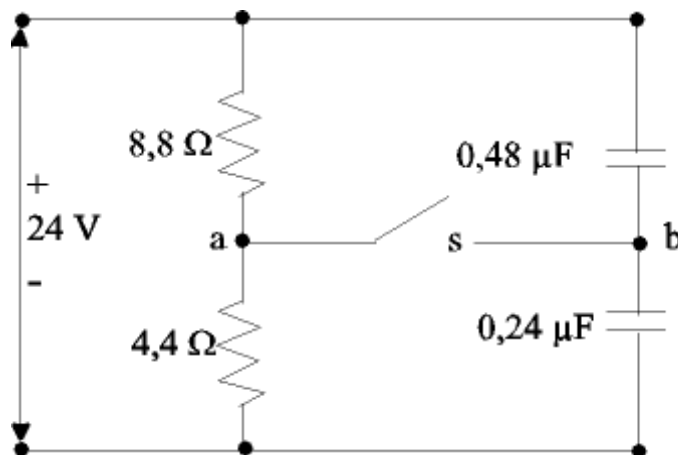
- Soit le circuit suivant :



$$C_1 = C_2 = 2 C_3 = 4,0 \mu\text{F}$$

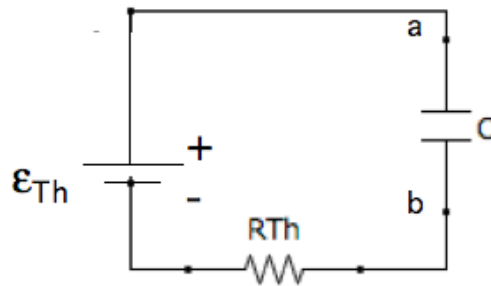
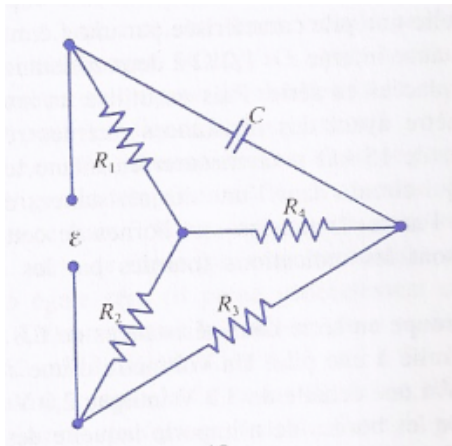
- Que vaut la capacité totale du circuit placé entre les bornes a et b. (R : $5,33 \mu\text{F}$).
- Quelle quantité de charge s'accumule sur chaque condensateur si $V = 50 \text{ V}$.
(R : $Q_1 = 0,2 \text{ mC}$; $Q_2 = Q_3 = 0,067 \text{ mC}$).

- 4) On charge un condensateur d'une capacité de $2,5 \mu\text{F}$ à l'aide d'une pile de $2,4 \text{ V}$ puis on le débranche et on le place en parallèle avec un second condensateur C_2 , initialement non chargé. Déterminez la valeur de C_2 sachant que la tension aux bornes des deux condensateurs a chuté à $1,8 \text{ V}$ ($R : 0,83 \mu\text{F}$).
- 5) a) Calculez la quantité d'énergie emmagasinée dans un condensateur constitué de deux plaques carrées de 9 cm de côté, séparées par un espace d'air de 2 mm , lorsque ses armatures portent une charge de $\pm 300 \mu\text{C}$ ($R = 1,3 \times 10^3 \text{ J}$).
- b) Que devient cette énergie si on introduit une plaque en mica ($\kappa = 7$) de 2 mm d'épaisseur qui remplit donc tout l'espace ($R = 1,8 \times 10^2 \text{ J}$).
- c) Même question que b pour le cas où la plaque de mica ne fait qu' 1 mm d'épaisseur ($R = 7,2 \times 10^2 \text{ J}$).
- 6) On monte deux résistances et deux condensateurs non chargés de la manière illustrée dans la figure. Sachant qu'il y a une différence de potentiel de 24 V aux bornes de ce réseau, déterminez :
- a) le potentiel au point a lorsque l'interrupteur S est ouvert depuis un temps long (posez que $V = 0$ à la borne négative de la source) ($R : 8 \text{ V}$),
- b) le potentiel au point b lorsque l'interrupteur est ouvert ($R : 16 \text{ V}$),
- c) le potentiel final au même point lorsque l'interrupteur est fermé depuis un temps long ($R : 8 \text{ V}$),
- d) la quantité de charge qui a traversé l'interrupteur S fermé ($R : -5,76 \mu\text{C}$).



- 7) [Examen Août 2012 – A réaliser comme travail à domicile – demander l'aide de l'assistant à la séance suivante si vous avez des difficultés à résoudre l'exercice]

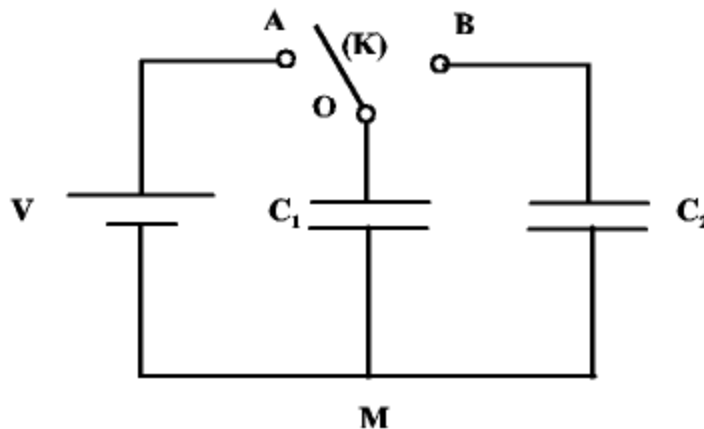
Soit le circuit suivant constitué d'une pile de f.e.m. $\varepsilon = 10 \text{ V}$, de quatre résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 , chacune égale à 100Ω , et d'un condensateur de capacité $C = 10 \text{ pF}$:



- Redessinez ce circuit avec le condensateur de capacité C comme élément externe d'un circuit de Thévenin ;
- Calculez la tension de Thévenin ε_{Th} . Appliquez pour ce faire les lois de Kirchhoff.
- Calculez la résistance de Thévenin R_{Th} . Pour ce faire, commencez par dessiner l'assemblage de résistances à simplifier.
- Grâce au circuit équivalent obtenu précédemment, écrire l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de la charge du condensateur.
- Quelle est la constante de temps du circuit RC équivalent ?
- Quelle est la charge maximale du condensateur ?

- 8) [Examen Août 2013 – A réaliser comme travail à domicile – demander l'aide de l'assistant à la séance suivante si vous avez des difficultés à résoudre l'exercice]

Soit le circuit suivant dans lequel $V = 60 \text{ V}$, $C_1 = 10 \mu\text{F}$ et $C_2 = 20 \mu\text{F}$; les condensateurs sont initialement déchargés.



- Que valent la charge Q_0 et l'énergie électrostatique U_0 du condensateur C_1 après la fermeture du commutateur K qui relie le point O au point A [on laisse un peu de temps s'écouler afin que le circuit atteigne l'état stationnaire].
- Quelle est alors la différence de potentiel entre les points O et M?
- Quelle est alors la différence de potentiel entre les points O et B?
- On bascule ensuite le commutateur de manière à ce qu'il relie le point O au point B. Que devient la charge Q_1 de C_1 , et quelle est la charge Q_2 de C_2 (après avoir laissé le circuit atteindre l'état stationnaire) ?
- Quelle est alors la différence de potentiel V' entre les points O et M?
- Que valent les énergies électrostatiques U_1 et U_2 , des condensateurs C_1 et C_2 ?
- Y a-t-il eu conservation de l'énergie électrostatique lorsqu'on a basculé le commutateur ? Justifiez et expliquez, en vous basant sur les indices fournis par les réponses aux questions b) et c).