

CHAPITRE XIV : Les circuits à courant alternatif : impédance, puissance, facteur de qualité et largeur de bande

XIV.1 : L'impédance complexe et son module

L'impédance est une grandeur qui généralise la notion de résistance, de réactance capacitive et de réactance inductive dans le cas des circuits comportant plusieurs éléments de nature différente. Elle caractérise la manière dont le circuit freine le passage du courant en donnant le rapport qui existe entre la tension de la source de f.é.m. et le courant résultant. Toutefois, comme dans le cas d'un circuit avec seulement un condensateur ou seulement un inducteur (voir sections XIII.2 et XIII.3), il y a un déphasage entre tension et courant qui fait qu'ils ne passent pas en même temps par leur maximum et qu'on ne peut prendre le rapport des valeurs instantanées, v/i , pour caractériser le circuit ; en effet, ce rapport varie dans le temps. Par contre on peut le faire soit avec le rapport des amplitudes ou des valeurs efficaces, comme dans le cas des réactances, soit avec le rapport des phaseurs. Dans ce dernier cas, on définit une impédance complexe :

$$\boxed{\mathbf{Z} \equiv \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{\mathbf{i}}}} \quad (\text{XIV.1})$$

Le module de cette impédance complexe est égale au rapport de l'amplitude de la tension à celle du courant ou encore, au rapport des valeurs efficaces :

$$|\mathbf{Z}| = \left| \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{\mathbf{i}}} \right| = \left| \frac{\mathbf{v}_0}{\mathbf{i}_0} e^{j\phi} \right| = \frac{\mathbf{v}_0}{\mathbf{i}_0} = \frac{\mathbf{v}_{\text{eff}}}{\mathbf{i}_{\text{eff}}} \quad (\text{XIV.2})$$

car $|e^{j\phi}| = 1$

Voyons maintenant ce que valent les impédances dans quelques cas particuliers.

L'impédance d'une résistance :

$$\mathbf{Z}_R = \frac{\mathbf{v}_{0R}}{\mathbf{i}_0} = \frac{R\mathbf{i}_0}{\mathbf{i}_0}$$

car $\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{i}_0 e^{j\phi}$ et $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{0R} e^{j\phi}$.

Par conséquent :

$$\boxed{Z_R = |Z_R| = R, \text{ pour une résistance}} \quad (\text{XIV.3})$$

Dans le cas d'une résistance, la notion de résistance et d'impédance complexe coïncident donc.

L'impédance d'un condensateur :

$$Z_C = \frac{-v_{0C} j}{i_0} = \frac{-i_0 / \omega C}{i_0} j = -\frac{1}{\omega C} j = \frac{1}{\omega C j} \quad (\text{XIV.4})$$

En effet, $-j^2 = 1$ et par conséquent : $-j = \frac{1}{j}$.

Le résultat (XIV.4) peut encore s'écrire en fonction de la réactance capacitive :

$$\boxed{Z_C = -X_C j, \text{ pour un condensateur}} \quad (\text{XIV.5})$$

L'impédance complexe d'un condensateur est purement imaginaire et négative ; son module est égal à la réactance capacitive :

$$\boxed{|Z_C| = X_C, \text{ pour un condensateur}} \quad (\text{XIV.6})$$

L'impédance d'un inducteur :

$$Z_L = \frac{v_{0L} j}{i_0} = \frac{\omega L i_0}{i_0} j = \omega L j, \quad (\text{XIV.7})$$

ce qui peut s'écrire en fonction de la réactance inductive :

$$\boxed{Z_L = X_L j, \text{ pour un inducteur}} \quad (\text{XIV.8})$$

L'impédance complexe d'un inducteur est purement imaginaire et positive ; son module est égal à la réactance inductive :

$$\boxed{|Z_L| = X_L, \text{ pour un inducteur}} \quad (\text{XIV.9})$$

L'impédance d'un circuit RLC série :

Pour un circuit comme celui de la figure XIII.11 :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\hat{v}}{\hat{i}} = \frac{v_0 R + (v_0 L - v_0 C)j}{i_0} \\ &= \frac{v_0 R}{i_0} + \left(\frac{v_0 L}{i_0} - \frac{v_0 C}{i_0} \right) j \end{aligned}$$

$$Z = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) j, \text{ pour un circuit RLC série} \quad (\text{XIV.10})$$

On remarque que ce résultat est équivalent à la simple addition des impédances complexes Z_R (XIV.3), Z_C (XIV.4) et Z_L (XIV.7). Cette fois l'impédance comporte une partie réelle et une partie imaginaire et son module vaut :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \text{ pour un circuit RLC série} \quad (\text{XIV.11})$$

C'est aussi le rapport de l'amplitude de la tension de la source à celle du courant, ou encore le rapport des valeurs efficaces.

Exemple :

Dans le cas d'un circuit RLC série comportant une résistance de $200 \, \Omega$, un condensateur de capacité $10 \, \mu\text{F}$ et un inducteur d'inductance $20 \, \text{mH}$, a) calculez son impédance pour une fréquence de $50 \, \text{Hz}$ b) calculez le courant efficace dans le circuit pour une tension sinusoïdale de $300 \, \text{V}$ d'amplitude.

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100 \pi \, \text{rad/s} = 314 \, \text{rad/s}$

$$Z_R = 200 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 10 \times 10^{-6}} = 318 \, \Omega$$

$$Z_C = -318 j \, \Omega$$

$$X_L = \omega L = 314 \times 20 \times 10^{-3} = 6,3 \, \Omega$$

$$Z_L = 6,3 j \, \Omega$$

$$Z = 200 - 318 j + 6,3 j \equiv (200 - 312 j) \, \Omega$$

b) $v_0 = 300 \, \text{V} \quad v_{\text{eff}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \frac{300}{\sqrt{2}} = 212 \, \text{V}$

$$|Z| = \frac{v_{\text{eff}}}{i_{\text{eff}}} \quad i_{\text{eff}} = \frac{v_{\text{eff}}}{|Z|}$$

$$|Z| = \sqrt{200^2 + 312^2} = 370 \, \Omega$$

$$i_{\text{eff}} = \frac{212 \, \text{V}}{370 \, \Omega} = 0,57 \, \text{A}.$$

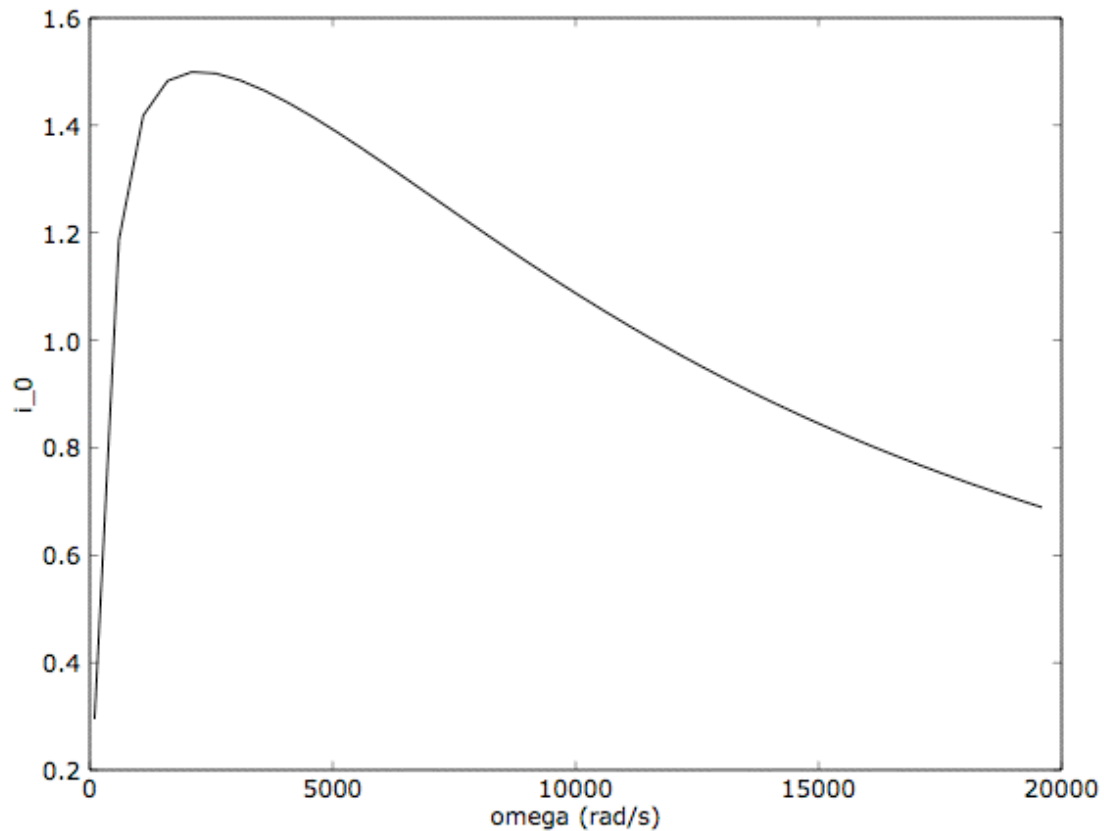


Figure XIV.0 . La variation de $i_0 = v_0 / |Z|$ pour le circuit RLC série de l'exemple ci-dessus. Notez la valeur maximale de i_0 atteinte lorsque le module de l'impédance Z est minimale, soit lorsque $\omega L = 1/\omega C$, soit lorsque $\omega = 2240 \text{ rad/s}$. Ce comportement préfigure celui des circuits résonnants discutés à la section XIV.6

XIV.2 : Les impédances en série et en parallèle

a) En série

Lorsque divers éléments d'un circuit sont branchés en série, comme à la figure XIV.1, l'impédance équivalente de la combinaison d'éléments est égale à la somme des impédances de chaque élément.

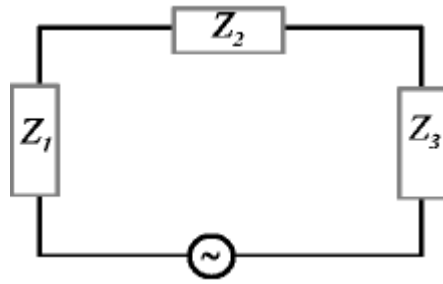


Figure XIV.1.

En effet, nous avons par définition de Z_{eq} :

$$Z_{eq} = \frac{\hat{v}}{\hat{i}},$$

où $\hat{v}$ est le phaseur de la tension aux bornes de la combinaison d'éléments qui s'obtient en ajoutant les phaseurs de chaque élément :

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \frac{\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3}{\hat{i}} = \frac{\hat{v}_1}{\hat{i}} + \frac{\hat{v}_2}{\hat{i}} + \frac{\hat{v}_3}{\hat{i}} \\ &= Z_1 + Z_2 + Z_3 . \end{aligned}$$

Par conséquent, pour une combinaison de n éléments en série, nous avons bien :

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (XIV.12)$$

b) en parallèle

Lorsque divers éléments d'un circuit sont branchés en parallèle, comme à la figure XIV.2, l'impédance équivalente de la combinaison d'éléments est l'inverse de la somme des inverses de l'impédance de chaque élément.

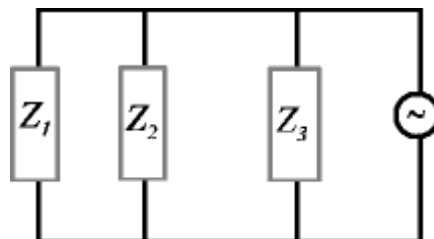


Figure XIV.2.

En effet, nous avons par définition de Z_{eq} :

$$Z_{eq} = \frac{\hat{v}}{\hat{i}}$$

où $\hat{v}$ est le phaseur de la tension aux bornes de chacun des éléments, qui est la même et qui est celle de la source ; $\hat{i}$ est le phaseur du courant débité par la source, qui est la somme instantanée de chacun des courants passant respectivement par Z_1 , Z_2 et Z_3 (loi des nœuds). Dès lors :

$$\hat{i} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3$$

et

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{v}} + \frac{\hat{i}_2}{\hat{v}} + \frac{\hat{i}_3}{\hat{v}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

Par conséquent, pour une combinaison de n impédances en parallèle, nous avons bien :

$$\boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}} \quad (XIV.13)$$

Afin de calculer des impédances inverses $1/Z$, exprimées sous la forme de nombres complexes, les relations suivantes seront utiles :

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\frac{1}{a + bj} = \frac{1}{a^2 + b^2} (a - bj)$$

XIV.3 : Relation entre impédance et déphasage

Lorsqu'on connaît l'impédance complexe d'un circuit, on peut en déduire aisément le déphasage de la tension par rapport au courant.

Soit $\hat{v} = v_0 e^{j\phi_1}$, $\hat{i} = i_0 e^{j\phi_2}$; le déphasage de la tension par rapport au courant est $\phi = \phi_1 - \phi_2$ (celui du courant par rapport à la tension est $\phi_2 - \phi_1 = -\phi$).

On a :

$$Z = \frac{\hat{v}}{\hat{i}} = \frac{v_0 e^{j\phi_1}}{i_0 e^{j\phi_2}} = \frac{v_0}{i_0} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$= |Z| e^{j\phi} = |Z| (\cos \phi + j \sin \phi)$$

L'impédance complexe peut toujours s'écrire :

$$Z = R_e\{Z\} + j I_m\{Z\} \quad (\text{XIV.14})$$

Dès lors :

$$R_e\{Z\} = |Z| \cos \phi$$

Et :

$$\cos \phi = \frac{R_e\{Z\}}{|Z|} \quad (\text{XIV.15})$$

On a aussi :

$$\text{tg} \phi = \frac{I_m\{Z\}}{R_e\{Z\}} \quad (\text{XIV.16})$$

XIV.4 : Résumé

Les relations entre phaseurs de la tension et du courant, impédance, et déphasage peuvent être visualisées sur le schéma de la figure (XIV.3).

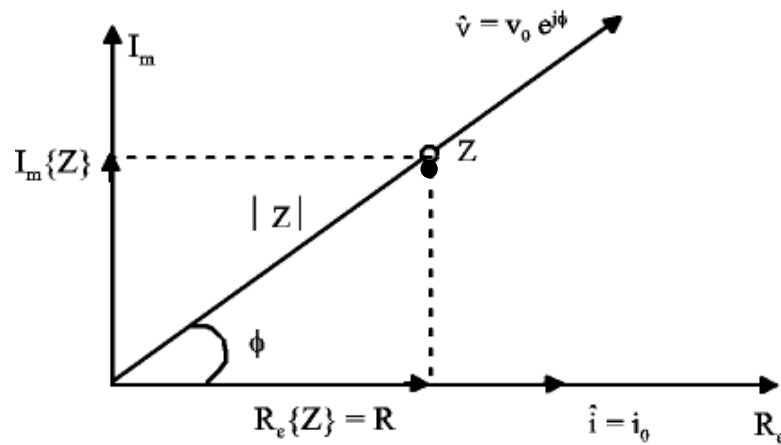


Figure XIV.3.

En outre :

$$\begin{aligned} \hat{v} &= Z \hat{i} \\ v_0 &= |Z| i_0 \\ v_{\text{eff}} &= |Z| i_{\text{eff}} \end{aligned}$$

XIV.5 La puissance dissipée en AC:

Comme nous l'avons vu à la section VII.6, la puissance électrique instantanée est donnée par :

$$p = vi$$

XIV.5.1. Dans une résistance :

Ce qui donne dans le cas d'une résistance :

$$p = R i^2 = R i_0^2 \sin^2(\omega t).$$

Et conduit à un taux moyen de dissipation :

$$\langle p \rangle = i_{\text{eff}}^2 R = \frac{v_{\text{eff}}^2}{R}$$

où i_{eff} et v_{eff} sont le courant et la tension efficace (voir chapitre VII).

Nous avons vu que $i_{\text{eff}} = i_0/\sqrt{2}$ et $v_{\text{eff}} = v_{0R}/\sqrt{2}$, pour des tensions et courants sinusoïdaux .

XIV.5.2. Dans un condensateur:

En utilisant les relations (XIII.2), (XIII.5), la puissance instantanée emmagasinée dans le condensateur est donnée par :

$$\begin{aligned} p = vi &= v_{0C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) i_0 \sin(\omega t) \\ &= -\frac{v_{0C} i_0}{2} \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

et illustrée à la figure (XIV.4).

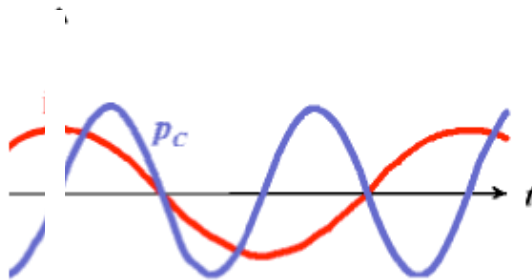


Figure XIV.4.

La puissance moyenne, calculée sur une période, vaut donc :

$$\langle p \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{v_0 C i_0}{2} \sin(2\omega t) dt$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la période.

Un changement de variable, $x = 2\omega t$, permet d'écrire :

$$\langle p \rangle = -\frac{v_0^2 C}{4T} \int_0^{4\pi} \sin x dx = 0 \quad (\text{XIV.17})$$

Contrairement à une résistance, un condensateur ne dissipe pas d'énergie sur un nombre entier de périodes. Ceci résulte du déphasage entre courant et tension. Pendant un quart de cycle, le condensateur emmagasine de l'énergie en accumulant des charges sur ces armatures, le produit $v i$ est positif, énergie qu'il restitue entièrement à la source pendant le quart suivant du cycle, le produit $v i$ est négatif (voir figure XIII.4). Une résistance, par contre, n'emmagasine pas l'énergie: elle la dissipe en chaleur et ne la restitue donc pas à la source.

XIV.5.3. Dans un inducteur:

En utilisant les relations (XIII.2) et (XIII.7), la puissance instantanée emmagasinée dans l'inducteur est donnée par :

$$\begin{aligned} p = v i &= v_0 L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) i_0 \sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} v_0 L i_0 \sin(2\omega t). \end{aligned}$$

Sa dépendance temporelle est illustrée à la figure XIV.5.

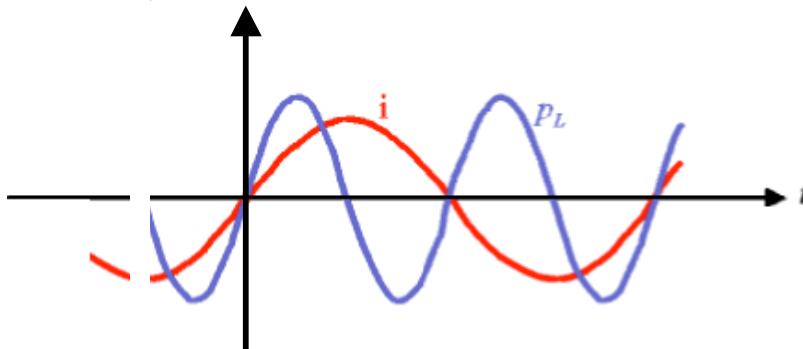


Figure XIV.5.

La puissance moyenne, calculée sur une période T , vaut donc :

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \frac{v_{0L}^2}{\omega L} \sin(2\omega t) dt = 0 \quad (\text{XIV.18})$$

Tout comme le condensateur, l'inducteur ne dissipe pas d'énergie sur un nombre demi-entier de périodes, dû au déphasage entre courant et tension. Pendant un quart de cycle, l'inducteur emmagasine de l'énergie, le produit $v i$ est positif ; il la restitue ensuite entièrement à la source pendant le quart de cycle suivant, le produit $v i$ est négatif (voir figure XIV.5).

XIV.5.4 : La puissance moyenne

Nous venons de constater que la puissance moyenne dissipée dans un condensateur ou dans un inducteur était toujours nulle (Eqs. XIV.17 et XIV.18). Seule la partie résistive du circuit dissipe de l'énergie.

Dès lors dans tout circuit dont on aura écrit l'impédance complexe sous la forme (XIV.14), la puissance moyenne dissipée peut s'écrire :

$$\langle p \rangle = R_e \{Z\} i_{\text{eff}}^2 \quad (\text{XIV.19})$$

où $R_e \{Z\}$ est la composante résistive de l'impédance du circuit et i_{eff} le courant efficace qui y circule et qui est aussi celui délivré par la source. Remarquons qu'ici, on ne peut remplacer $R_e \{Z\} i_{\text{eff}}$ par v_{eff} parce que $R_e \{Z\} i_{\text{eff}}$ est la tension efficace aux bornes de la composante résistive de l'impédance alors que v_{eff} est celle de tout le circuit y compris les éléments non résistifs, condensateur et inducteur ; elle vaut :

$$v_{\text{eff}} = |Z| i_{\text{eff}}$$

En remplaçant dans (XIV.19) et en utilisant (XIV.15), on obtient :

$$\boxed{\langle p \rangle = i_{\text{eff}} v_{\text{eff}} \cos \phi} \quad (\text{XIV.20})$$

La relation ci-dessus montre que dans un circuit comportant des inducteurs et/ou des condensateurs, la puissance n'est pas égale au produit $i_{\text{eff}} v_{\text{eff}}$, comme dans un circuit où il n'y aurait que des résistances; elle est toujours inférieure d'un facteur $\cos \phi$ que l'on appelle facteur

de puissance du circuit. Ce facteur vaut 1 quand il n'y a que des résistances, zéro lorsqu'il n'y a que des condensateurs ou que des inducteurs.

XIV.6 : Application au filtrage

Une application importante des circuits RC et RLC étudiés jusqu'ici est le **filtrage** d'un signal. Le filtrage est l'opération qui consiste à éliminer une plage de fréquences indésirable, par exemple un bruit de haute fréquence, ou une perturbation liée au réseau électrique à 50 Hz etc. On utilise alors un filtre, auquel on applique en entrée le signal à filtrer et on recueille en sortie le signal filtré. Le signal est en général une tension $u_s(t)$ variant avec le temps (Fig. XIV.6).



Figure XIV.6

On distingue deux types de filtres, les filtres *passifs* constitués d'éléments passifs tels des résistances, condensateurs et bobines, et les filtres *actifs*, qui incorporent des sources de tension auxiliaire. L'exemple le plus fameux de filtres actifs est l'amplificateur opérationnel. Dans ce cours cependant, nous nous limiterons à l'étude de quelques filtres passifs.

XIV.6.1 : Filtre passif passe-bas

A venir...

XIV.7 : Le phénomène de résonance

Alors que la composante résistive d'une impédance ne dépend pas de la fréquence angulaire, la partie imaginaire varie avec celle-ci. Par conséquent, dans un circuit qui n'est pas purement résistif, $|Z|$ varie avec ω et par conséquent il en va de même pour le courant qui circule dans le circuit ; pour V_{eff} fixe, I_{eff} varie avec ω . Dans certains cas $|Z|$ passe par un minimum pour

une valeur de la fréquence angulaire, ω_0 , appelée fréquence de résonance. Pour cette valeur le courant passe par un maximum. Etudions ce phénomène dans le cas du circuit RLC série.

La résonance dans un circuit RLC série

L'impédance, donnée par la relation (XIV.11), passe par un minimum pour $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, c'est-à-dire pour :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ pour le circuit RLC série} \quad (\text{XIV.21})$$

A cette fréquence $X_L = X_C$ de sorte que l'impédance est entièrement résistive $Z = R$ et $\cos \phi = 1$. Le courant maximum à la résonance vaut :

$$i_{\text{eff}}^{\text{max}} = \frac{V_{\text{eff}}}{R}, \text{ pour le circuit RLC série} \quad (\text{XIV.22})$$

Par conséquent, le pic sera d'autant plus prononcé que la résistance est faible, ainsi que l'illustrent les deux exemples de la figure XIV.6 qui montre la variation du courant efficace I_{eff} en fonction de la fréquence angulaire ω .

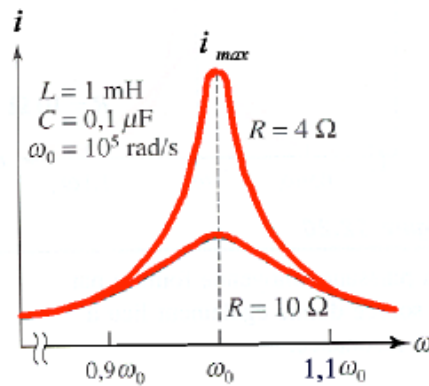


Figure XIV.6.

Dans un circuit RLC série la puissance moyenne dissipée passe elle aussi par un maximum à la résonance comme l'illustre la figure XIV.7.

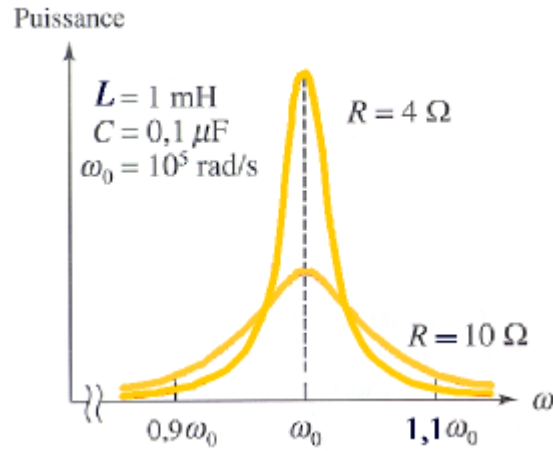


Figure XIV.7.

XIV.8 : Le facteur de qualité Q d'un circuit

On définit le facteur de qualité Q d'un circuit comme étant 2π fois l'énergie maximum emmagasinée dans le circuit divisée par l'énergie dissipée par cycle.

A titre d'exemple voyons ce que vaut ce facteur de qualité, à la résonance, dans le cas du circuit RLC série de la figure XIII.11.

Dans un tel circuit à la résonance, l'énergie emmagasinée est constante car lorsque la tension aux bornes du condensateur est maximum, le courant est nul et vice versa (le vérifier à titre d'exercice), dès lors $U_{\max} = \frac{1}{2} C v_{0C}^2 = \frac{1}{2} L i_0^2 = L I_{\text{eff}}^2$. Quant à l'énergie dissipée lors d'un cycle, elle s'obtient en multipliant la puissance moyenne dissipée, par la période ou l'inverse de la fréquence f . Par conséquent :

$$Q_0 = 2\pi \frac{L i_{\text{eff}}^2}{R i_{\text{eff}}^2 \frac{1}{f}} = 2\pi f \frac{L}{R} = \omega_0 \frac{L}{R} \quad (\text{XIV.23})$$

En faisant intervenir l'expression de la fréquence de résonance du circuit RLC série, obtenue en XIV.21, on obtient :

$Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ pour le circuit RLC série à la résonance,}$

(XIV.23)

XIV.9 : La largeur de bande d'un circuit

La plupart des circuits ont une impédance qui varie avec la fréquence ce qui veut dire qu'ils ne laissent pas passer toutes les fréquences de la même manière. Un exemple typique est donné par le circuit RLC série. Le courant connaît un maximum à la fréquence de résonance : celle-ci est favorisée, ainsi que les fréquences voisines. On définit la largeur de bande d'un circuit, BW (pour Band Width en anglais), comme la différence entre deux fréquences f_2 et f_1 auxquelles le courant ne vaut plus que $1/\sqrt{2}$ fois le courant maximum, ce qui correspond à une perte de puissance de 50% par rapport à celle de la fréquence de résonance :

$$\text{BW} = f_2 - f_1$$

(XIV.25)

Cette définition est illustrée à la figure XIV.8.

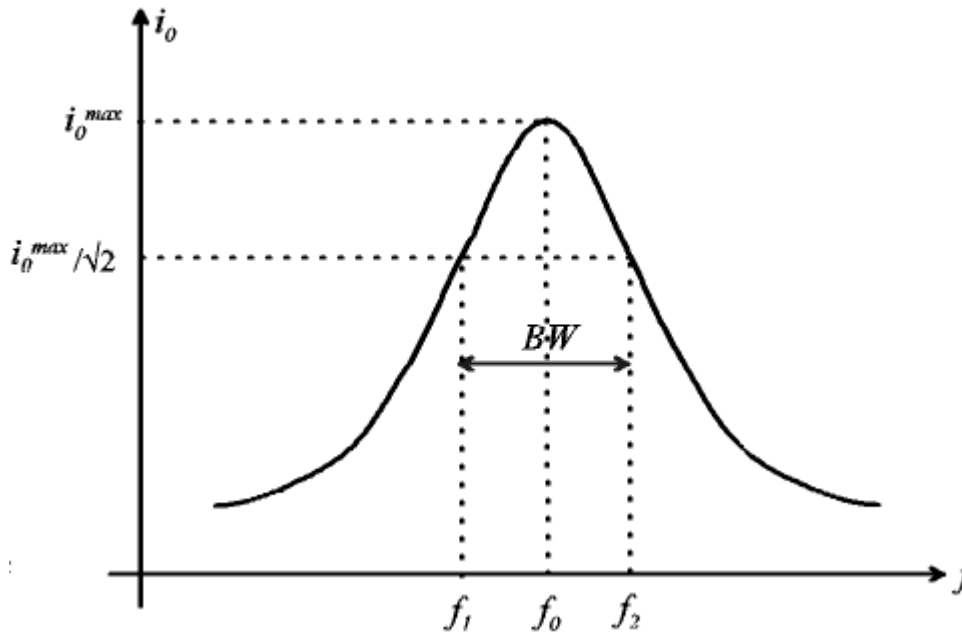


Figure XIV.8.

Nous allons voir maintenant que la largeur de bande d'un circuit peut être reliée au facteur de qualité, dans le cas du circuit RLC série.

Nous avons :

$$i_0^{\max} = \frac{V_0}{R}$$

Voyons maintenant à quelle fréquence, ce courant est réduit d'un facteur $\sqrt{2}$.

$$i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{R},$$

ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2,$$

dont les solutions sont :

$$\omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L}$$

et

$$\omega_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L}$$

La largeur de bande vaut donc :

$$BW = f_2 - f_1 = (\omega_2 - \omega_1) / 2\pi = \frac{R}{2\pi L}$$

En comparant au résultat (XIV.23) obtenu pour le facteur de qualité d'un tel circuit à la résonance, on voit que :

$$Q_0 = \frac{f_0}{BW}, \text{ pour le circuit RLC série}$$

(XIII.26)

ce qui montre que le facteur de qualité sera d'autant plus élevé que la largeur de bande est étroite relativement à la fréquence de résonance : il s'agit d'un circuit très sélectif.

XIV.10 : Application : le circuit RLC parallèle

Etudions maintenant le circuit de la figure XIV.11 qui comporte une résistance R , un inducteur d'inductance L et un condensateur de capacité C , montés en parallèle et alimentés par une source de f.é.m. alternative sinusoïdale de fréquence angulaire ω .

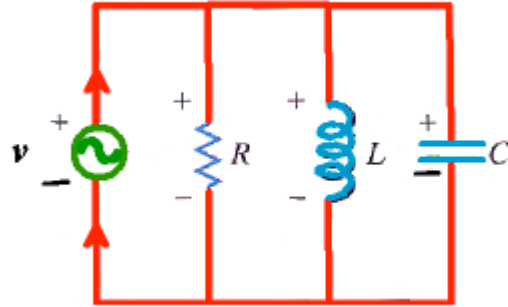


Figure XIV.11.

L'impédance

L'impédance complexe du circuit peut s'obtenir à partir de la relation (XIV.13) :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-j/\omega C} + \frac{1}{\omega L j} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Donc

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)j} \quad (\text{XIV.27})$$

ce qui donne en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$Z = \frac{\frac{1}{R} - \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)j}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad (\text{XIV.28})$$

dont le module vaut :

$$|Z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad (\text{XIV.29})$$

Le courant

Dès lors, l'amplitude du courant délivré par la source est donnée par :

$$i_0 = \frac{v_0}{|Z|} = v_0 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}, \text{ pour le circuit RLC parallèle} \quad (\text{XIV.30})$$

On remarque que le courant va passer par un minimum pour $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Le comportement de i_0 avec ω est présenté à la figure XIV.12 pour $v_0 = 1 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$, $L = 10 \mu\text{H}$.

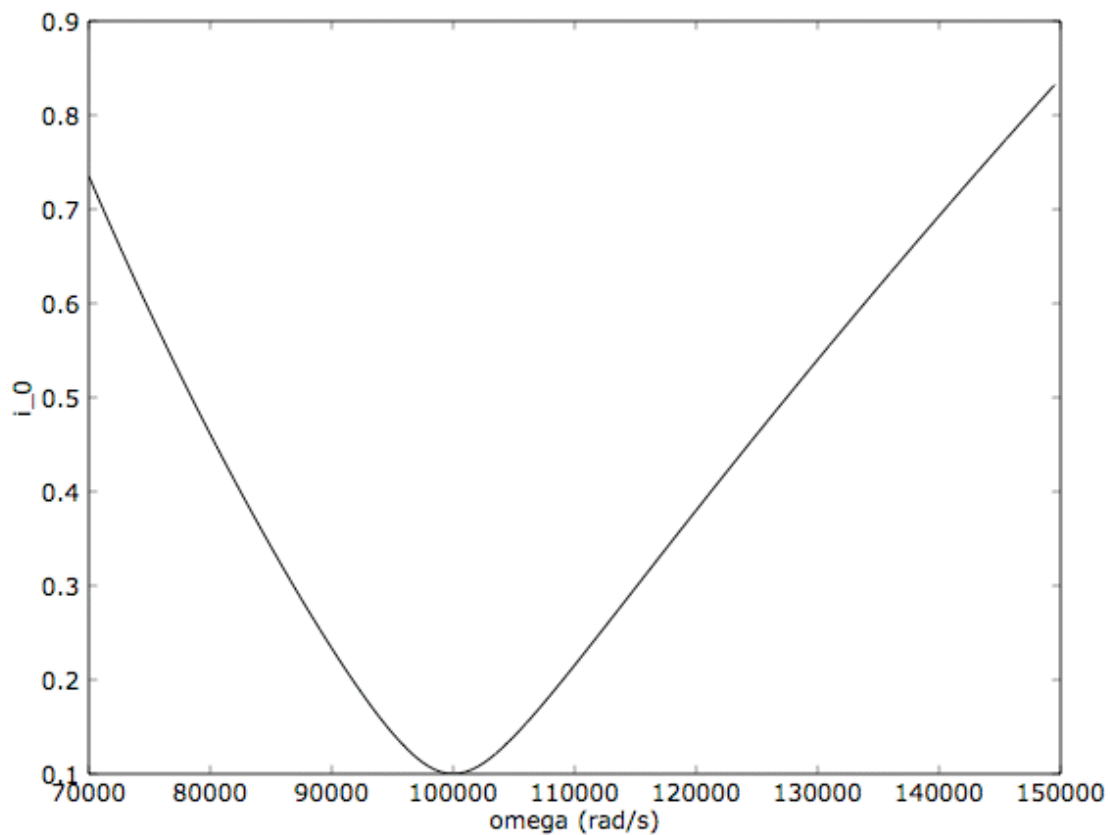


Figure XIV.12 Le comportement de i_0 en fonction de ω pour un circuit RLC parallèle.

Le déphasage

Le déphasage de la tension par rapport au courant est donné par la relation (XIV.16) :

$$\text{tg}\phi = \frac{I_m\{Z\}}{R_e\{Z\}} = \frac{-\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{1/R}$$

Et

$$\boxed{\operatorname{tg} \phi = R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right), \text{ pour le circuit RLC parallèle}} \quad (\text{XIV.31})$$

Ou encore (relation XIV.15) :

$$\cos \phi = \frac{R_e \{Z\}}{|Z|} = \frac{1 / \left(R \left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right] \right)}{1 / \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}$$

Donc :

$$\boxed{\cos \phi = \frac{1}{R \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}, \text{ pour le circuit RLC parallèle}} \quad (\text{XIV.32})$$

La puissance :

D'après la relation XIV.20, la puissance moyenne dissipée est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= i_{\text{eff}} v_{\text{eff}} \cdot \cos \phi \\ &= v_{\text{eff}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \cdot v_{\text{eff}} \cdot \frac{1}{R \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}} \end{aligned}$$

Conduisant à :

$$\boxed{\langle p \rangle = \frac{v_{\text{eff}}^2}{R}, \text{ pour le circuit RLC parallèle,}} \quad (\text{XIV.33})$$

comme dans un circuit avec seulement une résistance R. Cette fois la puissance est indépendante du déphasage et de la fréquence car seul le courant qui passe dans la résistance, et n'est pas déphasé, contribue à l'énergie dissipée. Remarquons que V_{eff} / R est le courant efficace dans R et qu'il ne vaut pas I_{eff} , le courant efficace débité par la source.

Les phaseurs :

Les phaseurs des tensions du circuit peuvent s'écrire en observant que la tension aux bornes de chacun des éléments du circuit est la même et que c'est celle délivrée par la source :

$$v_R = v_C = v_L = v.$$

A ces tensions instantanées correspondent les phaseurs

$$\hat{v} = \hat{v}_R = \hat{v}_C = \hat{v}_L = v_0, \quad (\text{XIV.34})$$

en choisissant arbitrairement la phase de la source égale à zéro.

Les phaseurs du courant dans chacun des éléments s'obtiennent à l'aide des relations (XIV.1), (XIV.3), (XIV.5) et (XIV.8) :

$$\hat{i}_R = \frac{v_0}{R} \quad (\text{XIV.35})$$

$$\hat{i}_C = \frac{v_0}{-X_C j} = \omega C v_0 j \quad (\text{XIV.36})$$

$$\hat{i}_L = \frac{v_0}{X_L j} = -\frac{v_0}{\omega L} j \quad (\text{XIV.35})$$

Quant au phaseur correspondant au courant total délivré par la source il s'obtient soit par addition :

$$\hat{i} = \hat{i}_R + \hat{i}_C + \hat{i}_L = v_0 \left[\frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) j \right] \quad (\text{XIV.38})$$

en faisant appel à la loi des nœuds :

$$i = i_R + i_C + i_L,$$

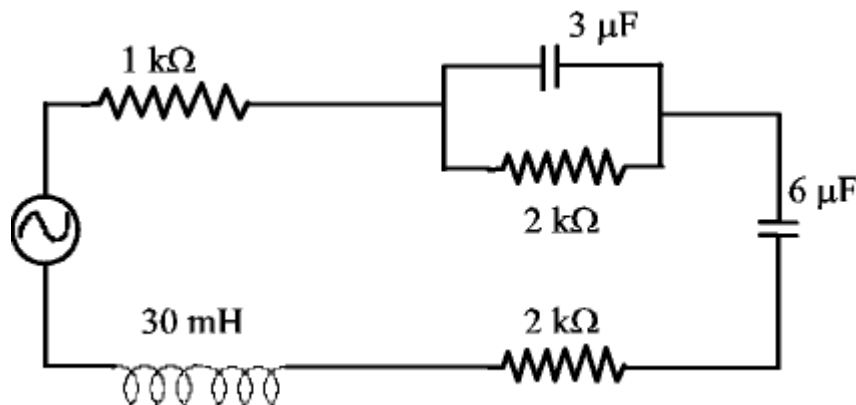
soit en partant de la définition de l'impédance (XIV.1) et de la valeur de celle-ci pour le circuit RLC parallèle (XIV.27) :

$$\hat{i} = \hat{v} \cdot \frac{1}{Z} = v_0 \left[\frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) j \right]$$

Pour $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, le courant passe cette fois par un minimum, comme le montre la relation (XIV.30) et le déphasage est alors nul, comme l'indique la relation (XIV.31) ou (XIV.32).

XIV.11 : Exercices

1. Une résistance de $25\ \Omega$, un condensateur de $10\ \mu\text{F}$ et un inducteur de $0,1\ \text{henry}$ qui possède une résistance de $12\ \Omega$ sont connectés en série. Déterminer pour des fréquences de $100\ \text{Hz}$ et de $1000\ \text{Hz}$: a) le module de l'impédance du circuit, b) le module de l'impédance de l'inducteur.
2. Un moteur, connecté à du $220\ \text{volts}$ (tension efficace), $50\ \text{Hertz}$, est équivalent à une résistance de $80\ \text{ohm}$ en série avec une self de $0,20\ \text{Henry}$. Que vaut le courant efficace circulant dans le moteur ? Quelle puissance électrique est fournie au moteur ?
3. Soit une résistance de $2\ \text{k}\Omega$ en parallèle avec un condensateur de $3\ \mu\text{F}$. Calculez l'impédance complexe équivalente à une fréquence de $50\ \text{Hz}$.
4. Soit le circuit suivant alimenté par une source sinusoïde de $220\ \text{V}$ efficace et $50\ \text{Hz}$:



- a) Calculez son impédance complexe.
 - b) Calculez le module de l'impédance.
 - c) Quel serait le courant mesuré par un ampèremètre de résistance interne négligeable placé dans le circuit, en série avec la source ?
 - d) Quel est le déphasage de la source par rapport à ce courant ?
 - e) Quelle est la puissance moyenne dissipée par ce circuit ?
 - f) Ecrire le phaseur du courant délivré par la source ainsi que celui de la tension de la source en posant le déphasage du courant nul.
5. [Examen juin 2013]

Un circuit comporte deux des trois éléments suivants: L , R et C , mais on ignore lesquels. Lorsqu'on le branche à une source AC de 120V et $60\ \text{Hz}$, le courant qui le parcourt atteint une intensité de $7,3\ \text{A}$ déphasée de $+13^\circ$ par rapport à la tension. On souhaite découvrir

quels sont ces deux éléments, savoir comment ils sont agencés (parallèle ou série) et déterminer leurs valeurs. Pour ce faire, on procèdera par étapes:

- Ecrire les phaseurs du courant et de la tension pour le circuit en question, d'après les éléments mesurés.
- Posant $Z = |Z| e^{j\phi}$ pour l'impédance du circuit, établir les valeurs de $|Z|$ et ϕ en vertu de la réponse à la question a)
- Dessinez les 6 circuits possibles, combinaisons de 2 éléments parmi L, R et C.
- Ecrivez en regard de chacun de ces circuits leur impédance.
- Certaines de ces impédances ne peuvent satisfaire aux conditions de l'énoncé. Lesquelles et pourquoi?
- Pour le(s) circuit(s) ayant une impédance compatible avec les conditions de l'énoncé, utilisez les résultats de la question b) pour calculer les valeurs de ses composants.

6. [Examen septembre 2014]

Le corps humain se comporte à la manière d'un circuit RC parallèle. Les lésions subies par le corps sont fonction de l'intensité du courant qui le parcourt.

- Ecrire l'impédance d'un tel circuit.
- Démontrer en conséquence que l'exposition du corps humain à une tension alternative V_{eff} est plus dangereuse que l'exposition à une tension continue de même valeur [indice : considérer la tension continue comme correspondant à $\omega = 0$].

Réponses:

1 a) 103Ω , 614Ω ; b) 63Ω , 628Ω

2. 2, 16 A ; 374 W

3. $439 \Omega - 828 j \Omega$

4.a) $(3,4 - 1,3 j) k\Omega$; b) $3,7 k\Omega$; c) 59 mA ; d) -21° ; e) 12,1 W) ;
f) $\hat{i} = 83 \text{ mA}$ et $\hat{v} = 311 e^{-j21^\circ} \text{ V}$.

5. b) $|Z| = 16.438 \Omega$, $\phi = -13^\circ$; f) RC série: $R = 16 \Omega$, $C = 717 \mu\text{F}$; RC parallèle: $R = 17.3 \Omega$, $C = 35.2 \mu\text{F}$

