EXAMEN DE PHYSIQUE (PHYS-F-103)
DEUXIEME PARTIE : EXERCICES

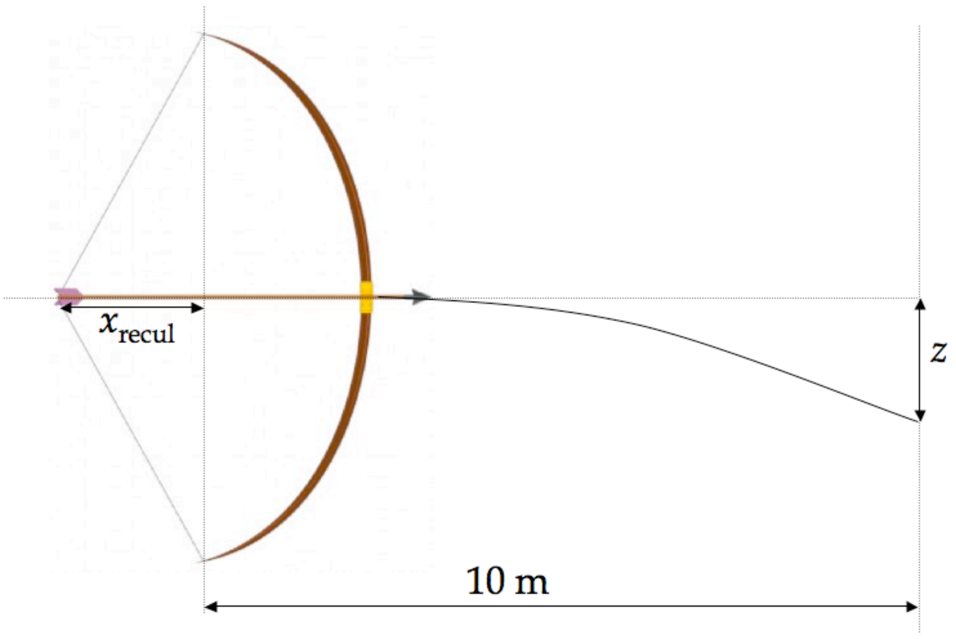
Formulaire

- accélération de la pesanteur $g = 10$ m/s^2
- permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ C^2 / Nm^2
- constante diélectrique de l'air $\kappa_{air} = 1.0006$
- si Z, z_1 et z_2 sont des nombres complexes, a, b des nombres réels, $j^2 = -1$, alors :

. $Z = \dfrac{1}{a+b\,j} = \dfrac{a-b\,j}{a^2+b^2}$

. si $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$, alors $|Z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Question 1 (30 points) :



Lorsqu'un arc est bandé, la flèche a reculé d'une distance x_{recul} par rapport à sa position de repos. Le module de la force exercée par la corde sur la flèche est proportionnelle à la distance x : $F = K\,x$, où l'on suppose la constante de rappel égale à $K = 200$ N / m.

a) **Calculer le travail accompli lorsque l'arc est bandé d'une distance x_{recul} = 10 cm, tenant compte du fait que la force varie avec la distance.**

$$W = \int_0^{0.1} \vec{F}(x) \bullet \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^{0.1} K\ x\,\mathrm{d}x = K \int_0^{0.1} x\,\mathrm{d}x = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.1} = 200\ (\frac{0.1^2}{2} - 0) = 200\frac{0.01}{2} = 1\,\text{Joule}$$

b) Calculer la vitesse atteinte par la flèche de masse 0.8 gramme lorsque la corde détendue (revenue en *x* = 0) l'a propulsée. Exprimer la vitesse en m/s et en km/h.

En vertu de la conservation de l'énergie, lorsque la corde a retrouvé sa position de repos, le travail W = 1 J a été converti en énergie cinétique :
$W = 1\text{J} = \frac{1}{2} m v_0{}^2 = 0.5\, 0.8 10^{-3} v_0{}^2$, c'est-à-dire $v_0{}^2 =$ 2500, soit v_0 = 50 m/s, ou 50 x 3600/1000 = 180 km/h.

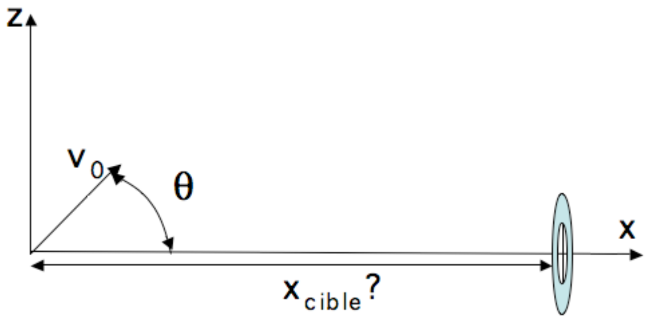
c) Si le tir est horizontal et la cible en face de la flèche à une distance de 10 m, de quelle hauteur *z* la flèche manquera-t-elle la cible ?

Selon x (axe horizontal), le mouvement est un MRU de vitesse initiale v_0 et de position initiale $x_0 = 0$.
Selon z (axe vertical positif vers le haut), le mouvement est un MRUA d'accélération g = 10 m/s^2 et de vitesse initiale nulle, et de position initiale $z_0 = 0$.

$x(t) = x_0 + v_0\, t = 0 + 50\, t = 50\, t$
$z(t) = z_0 - 0.5\, g\, t^2 = 0 - 5\, t^2$

Si x = 10 m, alors t = 0.2 s, et z = -5 $(0.2)^2$ = -5 x 0.04 = -0.2 m soit 20 cm vers le bas.

d) Dans le cas où la flèche est tirée vers le haut avec un angle θ = 30°, et une vitesse initiale de module v_0 = 50 m/s, écrire l'évolution avec le temps *t* de la position atteinte le long de l'axe *x*, c'est-à-dire la relation *x = x(t)*. Même question pour *z = z(t)*. On suppose l'axe *z* orienté positivement vers le haut.



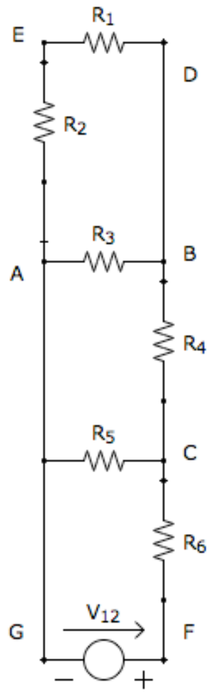
$x(t) = v_0 \cos 30°\, t = 50\, \sqrt{3} / 2\, t = 43.3\, t$
$z(t) = v_0 \sin 30°\, t - 0.5\, g\, t^2 = 50\, (1/2)\, t – 5\, t^2 = 25\, t - 5\, t^2$

e) Utiliser les résultats de la question d) pour déterminer à quelle distance x_{cible} doit se trouver la cible (en *z* = 0) pour que la flèche l'atteigne.

Si z = 0 : 25 t - 5 t^2 = 0 soit 5t (5 – t) = 0 qui admet 2 solutions t = 0 s et t = 5 s.
Apres 5 s, l'équation pour x(t) ci-dessus indique que la flèche aura parcouru une distance égale à 5 x 43.3 = 216.5 m

Question 2 (20 points) :

Soit le circuit suivant :



$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6$
$= R = 120\ \Omega$

$V = 12V$

a) [5 pts] Calculez-en la résistance équivalente.

R_1 , R_2 en série : $R_{12} = 2\ R$

R_{12} // R_3: $\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R}$ donc $R_{123} = 2R/3$

R_{123} en série R_4 : $R_{1234} = R_{123} + R_4 = 2R/3 + R = 5R/3$

R_{1234} // R_5 : $\frac{1}{R_{12345}} = \frac{1}{R_{1234}} + \frac{1}{R_5} = \frac{3}{5R} + \frac{1}{R} = \frac{8}{5R}$

R_{12345} en série R_6 : $R_{eq} = R_{12345} + R_6 = 5R/8 + R = 13R/8 = 13 \times 120 / 8 = 195\ \Omega$

b) [2 pts] Quelle est l'intensité du courant débité par la pile ?

$I = V / R_{eq} = 12 / 195 = 0.0615\ A = 61.5\ mA$

c) [8 pts] Quelle est l'intensité du courant parcourant chaque résistance ?

On peut procéder de diverses manières :

- Lois de noeuds et des mailles : possible mais les calculs sont fastidieux !

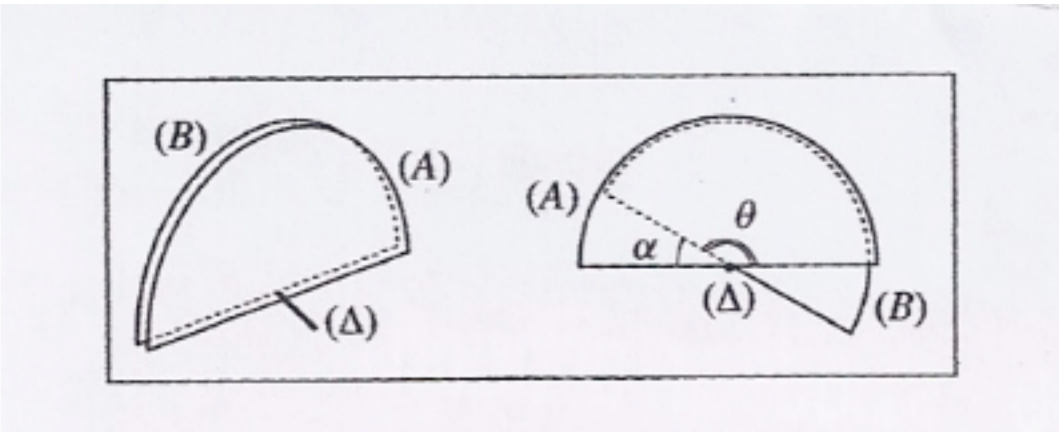
- De proche en proche, en partant de la borne positive de la pile, et connaissant le courant circulant dans R_6 : $V_F - V_C = R\ I_6 = 120 \times 0.0615 = 7.38$ V, car I_6 est le courant total débité par la pile. Comme $V_F = +12$ V (et par suite $V_G = V_A = 0$ V, puisque la pile possède une tension de 12 V), $V_C = 12 - 7.38 = 4.62$ V
  Le courant circulant dans R_5 se déduit alors facilement de la loi d'Ohm :
  $V_C - V_G = 4.62 - 0 = 4.62 = R\ I_5$. Donc $I_5 = 4.62 / 120 = 0.0385$ A = 38.5 mA.
  En vertu de la loi des nœuds, le courant parcourant R_4 est alors 61.5 – 38.5 = 23 mA. Le potentiel au point B se déduit par conséquent de la loi d'Ohm: $V_C - V_B = R_4 I_4 = 120 \times 0.023 = 2.76$ V, soit $V_B = 4.62 - 2.76 = 1.86$ V.
  On obtient à ce stade la réponse à la question d.
  La loi d'Ohm nous permet de calculer le courant circulant dans la résistance R_3 :
  $V_B - V_A = 1.86 = R_3 I_3 = 120\ I_3$. Donc $I_3 = 15.5$ mA.
  La loi des nœuds au nœud B implique $I_4 = I_3 + I_1$, soit $I_1 = 23 - 15.5 = 7.5$ mA, qui parcourt également R_2.

d) [5 pts] Quelle est la différence de potentiel entre les points A et B ?

En vertu des résultats de la question c) ci-dessus, $V_A = 0$ V et $V_B = 1.86$ V.
Donc $V_B - V_A = 1.86$ V.

Question 3 (20 points) :

Les armatures d'un condensateur plan à capacité variable sont des demi-disques de rayon *r* = 5 cm placés dans l'air à la distance *d* = 5 mm l'une de l'autre. L'armature (B) peut tourner par rapport à (A) autour de l'axe (Δ). La position de (A) par rapport à (B) est définie par l'angle α. La capacité du condensateur est fonction de la surface des armatures en vis-à-vis.



a) [4 pts] **Calculer la capacité C_0 de ce condensateur lorsque α = 0.**

L'aire A de l'armature est $A = \pi r^2/2 = \pi\ (0.05)^2/2 = 0.00393\ m^2$. Or la capacité d'un condensateur plan dans l'air s'exprime par :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \kappa A}{d} = \frac{8.85 10^{-12} \times 1.0006 \times 0.00393}{5\ 10^{-3}} = 6.9\ 10^{-12} \mathrm{F} = 6.9 \text{ pF}$$

b) [4 pts] **On charge le condensateur sous une tension *V* = 100 V et on l'isole électriquement. On tourne ensuite l'armature (B) d'un angle α = 30°. Calculer la capacité du condensateur dans cette configuration.**

Lorsque α = 30°, la capacité sera réduite proportionnellement à la réduction de la surface des armatures en vis-à-vis, laquelle est proportionnelle à $\theta = 180° - \alpha$:
$A' = A\,\theta / 180$, soit $C' = C\,\theta / 180$. Donc avec $\theta = 150°$:
$C' = C \times 150 / 180 = 5.8$ pF.

c) [4 pts] **Que valent la charge et la tension à ses bornes dans cette nouvelle configuration ?**

Commençons par calculer la charge portée par le condensateur dans la configuration $\alpha = 0°$, soit $Q = CV = 6.9\ 10^{-12}\ 100 = 6.9\ 10^{-10}$ Coulomb. Puisque le condensateur est isolé électriquement, cette charge ne sera pas modifiée lors de la rotation des armatures. Comme la capacité du condensateur est désormais de 5.8 pF pour une charge inchangée de $6.9\ 10^{-10}$ Coulomb, la tension aux bornes du condensateur s'élève dorénavant à $V' = Q/C' = 6.9\ 10^{-10}\ /\ 5.8\ 10^{-12} = 119$ V.

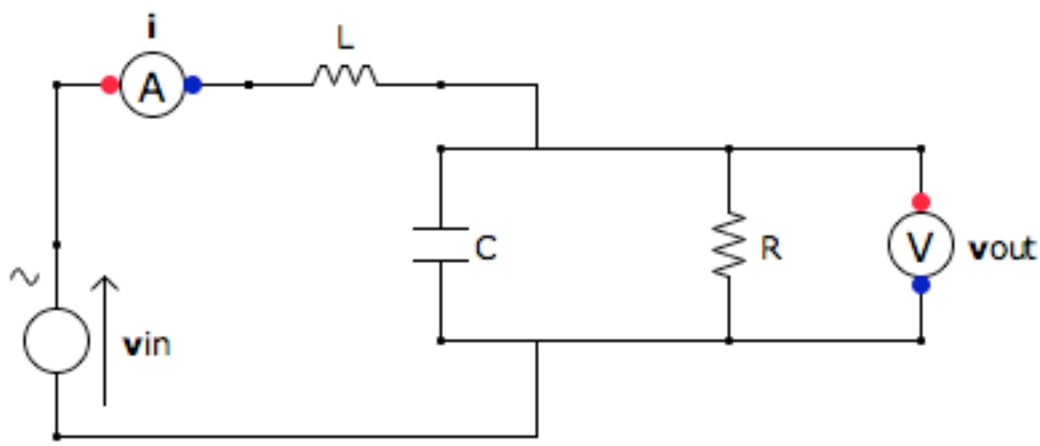
d) [4 pts] **Calculer l'énergie électrostatique du condensateur avant et après la rotation de (B).**
L'énergie emmagasinée par un conducteur de capacité C portant une charge Q vaut :
$U = 0.5\ Q\ V = 0.5\ 6.9\ 10^{-10}\ 100 = 3.45\ 10^{-8}$ J pour $\alpha = 0°$, et
$U' = 0.5\ Q\ V' = 0.5\ 6.9\ 10^{-10}\ 119 = 4.11\ 10^{-8}$ J pour $\alpha = 30°$.

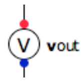
e) [4 pts] **D'où vient la différence ?**

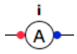
Un travail a été fourni contre la force de Coulomb par l'expérimentateur lorsqu'il a tourné l'armature (B). En effet, le charges se sont redistribuées au sein des armatures pour n'occuper que la partie des armatures en vis-à-vis l'une de l'autre. Cette force était dirigée dans le plan des armatures, c'est-à-dire dans celui du mouvement des armatures. Il en a résulté un travail non nul de la force mécanique faisant tourner les armatures.

Question 4 (27 points) :

Soit le circuit RLC suivant alimenté par une source de tension sinusoïdale de 220V efficace et de fréquence 50 Hz



où le symbole 

désigne un voltmètre mesurant la tension. On suppose que l'intensité du courant parcourant le voltmètre est négligeable, et le symbole 

désigne un ampéremètre mesurant l'intensité du courant. On suppose qu'il n'occasionne pas de chute de tension à ses bornes.

a) [3 pts] **Calculez l'impédance complexe Z_{tot} de ce circuit si L = 30 mH, C = 5µF, R = 1 kΩ.**

Les trois impédances impliquées sont
$Z_R = 1000\ \Omega$, $Z_C = 1/\omega Cj = -j/\omega C = -636.9\,j\ \Omega$, $Z_L = \omega Lj = 9.42\,j\ \Omega$,
puisque $\omega = 2\pi f = 6.28 \times 50 = 314$ rad/s.
La résistance et le condensateur sont en parallèle, et cette combinaison est en série avec la bobine. Donc :
$Z_{tot} = Z_L + Z_{//} = Z_L + (1/Z_R + 1/Z_C)^{-1}$

Commençons par calculer
$1/Z_{//} = (1/Z_R + 1/Z_C) = 1/1000 - 1/(636.9\,j) = 10^{-3} + 1.57\ 10^{-3}\,j$
Donc

$$Z_{//}(\Omega) = \frac{1}{10^{-3} + 1.57\ 10^{-3}\,j} = 1000\frac{1}{1+1.57\,j} = 1000\frac{1-1.57\,j}{1^2+1.57^2} = 288.6\,(1-1.57\,j) = 288.6 - 453.1j$$

$Z_{tot} = Z_L + Z_{//} = 9.42\,j + 288.6 - 453.1\,j = 288.6 - 443.7\,j$

b) [3 pts] **Calculez le module de l'impédance.**

$|Z_{tot}|^2 = 288.6^2 + 443.7^2$, soit $Z_{tot} = 529.28\ \Omega$

c) [3 pts] **Calculez l'intensité i_{eff} du courant débité par le générateur et mesuré par l'amperemètre.**

$$i_{eff} = \frac{v_{eff}}{|Z_{tot}|} = \frac{220}{529.28} = 0.416 \text{ A}$$

d) [3 pts] **Quel est le déphasage du générateur de tension par rapport à ce courant ?**

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\Im\text{m}(Z_{tot})}{\Re\text{e}(Z_{tot})} = \frac{-443.7}{288.6}, \text{ soit } \varphi = -56.9°.$$

Le quadrant de φ est déduit du fait que sin φ < 0 et cos φ >0.

Donc, si $\hat{v} = Z_{tot}\,\hat{i} = 529\,e^{-56.9j}\,\hat{i}$, i est pris comme phase de référence (phaseur de i est i_0 de phase nulle), et le déphasage de la tension par rapport au courant est
φ = -56.9°.

e) [3 pts] **Quelle est la puissance moyenne dissipée par ce circuit ?**

p = $i_{\text{eff}}\, v_{\text{eff}} \cos \varphi$ = 0.416 220 cos(-56.9) = 50 W

f) [3 pts] **Ecrire le phaseur du courant délivré par la source ainsi que celui de la tension de la source en posant le déphasage du courant nul.**

$$\hat{i} = i_0 = i_{eff}\sqrt{2} = 0.588 \text{ A}$$
$$\hat{v} = Z_{tot}\,\hat{i} = 529 e^{-56.9j}\, i_0 = 529 e^{-56.9j}\, 0.588 = 311\, e^{-56.9j}$$

g) [3 pts] **Quelle est la tension effective $v_{out,eff}$ mesurée par le voltmètre ?**

La chute de tension aux bornes communes du condensateur et de la résistance s'obtient simplement par $\hat{v}_{out} = Z_{//}\,\hat{i}$, avec $Z_{//}$ = 288.6 – 453.1 j comme calculé à la question a. Le module de $Z_{//}$ vaut 537.2 Ω et le déphasage φ' = -57.5°, calculé selon le même principe qu'à la question d.

Donc $\hat{v}_{out} = Z_{//}\hat{i} = 537.2 e^{-57.5j}\, i_0 = 537.2 e^{-57.5j}\, 0.588 = 315.8\, e^{-57.5j}$
Et donc $v_{\text{eff}} = v_0 / \sqrt{2}$ = 315.8 / √2 = 223.35 V

h) [3 pts] **Ecrire le phaseur de cette tension en posant le déphasage du courant de la source nul.**

Le déphasage de cette tension v_{out} par rapport au courant de la source est simplement -57.5°, comme calculé ci-dessus.

i) [3 pts] **Même question en posant le déphasage de la tension de la source nul**.

En prenant comme phase de référence celle de la tension de la source (-56.9°), le déphasage s'élève à -57.5 – (-56.9) = -0.6°.