PREMIERE PARTIE : THEORIE

Question 1 (7 points) :

Les factures d'électricité sont aujourd'hui encore libellées en kWh (kilowatt-heure).

1. [2] Quelle est la grandeur physique mesurée par une telle unité ? Justifier votre réponse.

Watt = unité de puissance ;
Watt-heure = unité de puissance x durée = énergie

2. [1] Quelle est l'unité correspondante dans le système international d'unités (S.I.) ?

L'unité S.I. de travail est le Joule

3. [4] Calculer le facteur de conversion entre le kWh et l'unité correspondante dans le système international d'unités.

1 kW h = 1000 W x 3600 sec = 1000 J/s x 3600 s = 3.6 10^6 J

Question 2 (16 points) :

1. [2] Ecrire la relation définissant l'auto-inductance (généralement notée L) d'un composant électrique.

$$\xi_{\text{ind}} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

2. [2] Enoncer la loi d'Ohm (sans oublier les conventions de signe), et donner son expression mathématique.

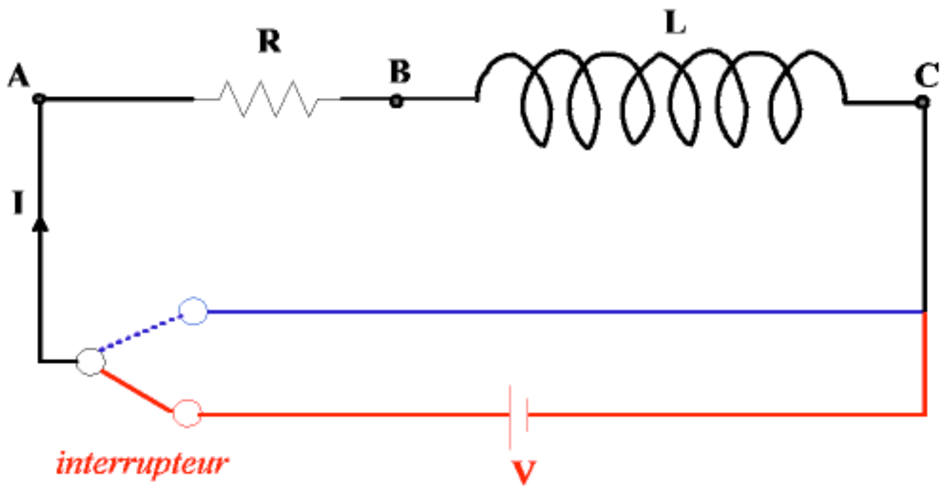
   La chute de potentiel aux bornes d'une résistance est égale au produit de la résistance et du courant parcourant la résistance, la tension la plus élevée étant située à l'entrée de la résistance par rapport au sens conventionnel du courant :

   $V = R\,I$

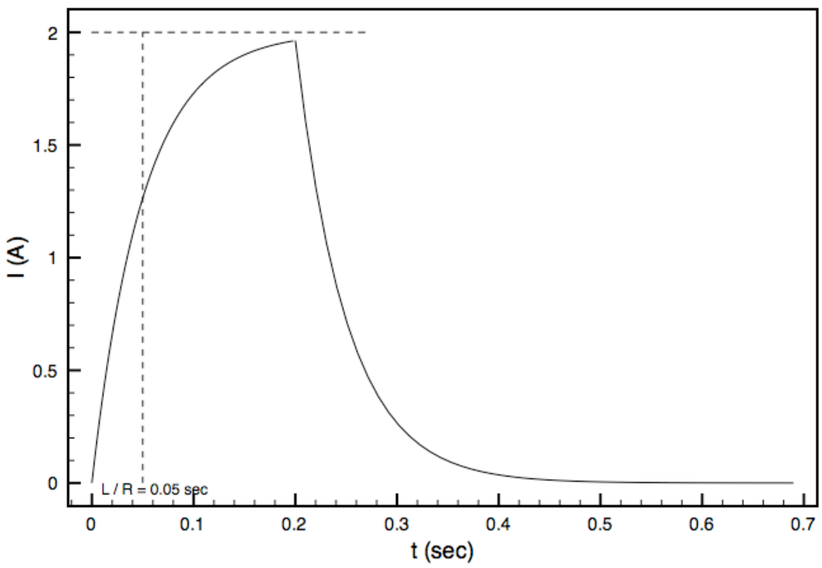
3. [4] A partir de ces deux lois, montrer que le produit L/R (où R est une résistance et L une auto-inductance) possède les dimensions d'un temps. [Conseil : utiliser l'analyse dimensionnelle ; inutile de refaire la théorie du circuit RL]

$$\left[\frac{L}{R}\right]=\left[\frac{\xi_{\text{ind}}}{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}\frac{1}{\frac{V}{I}}\right]=\left[\frac{\xi_{\text{ind}}}{V}\frac{I}{\mathrm{d}I}\mathrm{d}t\right]=1\times1\times[\mathrm{d}t]=\sec$$

4. [6] Dessiner un circuit RL (où R = 2 Ω et L = 100 mH) série alimenté en courant continu par une pile de 4 V, en y plaçant un interrupteur. Dessiner l'évolution temporelle de l'intensité du courant dans ce circuit après la fermeture de l'interrupteur. L'interrupteur est ouvert à nouveau 200 ms après sa fermeture. Dessiner l'évolution de l'intensité du courant pendant les 500 ms suivant l'ouverture de l'interrupteur. Placer la constante de temps L/R sur les courbes ci-dessus [Note : $e^{-1} = 0.37$, $e^{-4} = 0.018$, $e^{-5} = 0.007$].



La constante de temps de ce circuit vaut L/R = 0.1 / 2 = 0.05 sec = 50 millisec. Après 200 millisec, soit 4 constantes de temps, l'intensité du courant a atteint V/R ($1-e^{-4}$), soit 4/2 (1-0.018) = 2 x 0.982, soit 2 A à 2% près.



5. [2] Quelle est (à 2% près) l'intensité maximale du courant circulant dans ce circuit ?

Voir ci-dessus

Question 3 (13 points) :

a) [2] Donnez la définition de l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique d'un corps de masse *m* se déplaçant à la vitesse *v* vaut
$K = \frac{1}{2} mv^2$

b) [2] Donnez la définition de l'énergie potentielle en relation avec la force dont elle dérive.

$$U(x) = U(0) - \int_0^x \vec{f}(x') \cdot d\vec{x'}$$

c) [2] Enoncez le théorème de l'énergie cinétique.

Le théorème de l'énergie cinétique s'exprime dans le cas général par :

$$\boxed{\int_A^B \overline{\mathbf{F}} \,.\, \overline{\mathbf{dl}} = \left[\frac{1}{2}\mathbf{mv}^2\right]_A^B}$$

signifiant que le travail effectué par une force $\overline{F}$ pour déplacer une masse *m* le long d'une trajectoire allant d'un point A à un point B est égal à la variation d'énergie cinétique de cette masse entre les points A et B.

d) [4] Qu'entend-on par conservation de l'énergie mécanique ? Illustrez par un exemple.

La somme des énergies potentielles et cinétique reste constante :

$$\boxed{\mathbf{K + U = constante}}$$

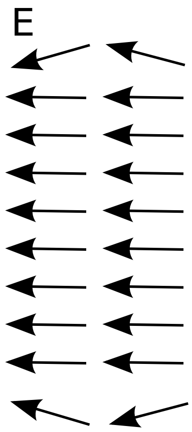
Exemple : Conversion d’énergie cinétique en énergie potentielle pour une masse lancée vers le haut dans un champ de gravité

e) [3] Sous qu'elle(s) condition(s) y a-t-il conservation de l'énergie mécanique ?

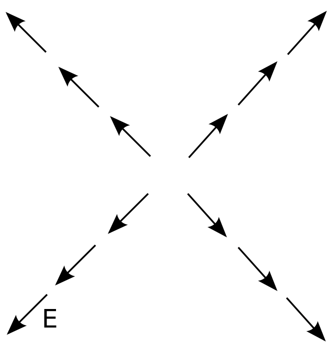
La force doit être conservative, c’est-à-dire le travail qu’elle effectue lorsqu’elle déplace son point d’application de A vers B ne dépend pas du chemin suivi.
Une force qui dépend de la vitesse (p.ex. force de frottement) n’est pas conservative.

Question 4 (9 points) :

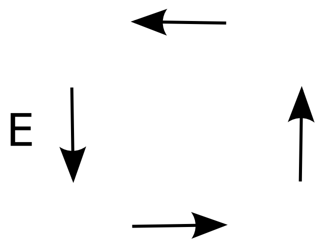
Voici représentés ci-dessous trois champs de vecteurs. Lesquels sont susceptibles de correspondre à des champs électriques (Attention, tenez compte non seulement de l’orientation des vecteurs mais aussi de leur module) ? Lorsque c’est possible, placez la charge ou la distribution de charges qui engendre ce champ, en n’oubliant pas d’indiquer leur signe.



C’est le champ observé entre deux plaques de condensateur, la plaque positive étant située à droite.



Cette situation pourrait correspondre à une charge ponctuelle si le module du vecteur champ diminuait avec la distance au centre de symétrie. Mais comme ce module est constant, cette situation ne peut correspondre à un champ électrique de charge ponctuelle.



Il n’y a aucune distribution de charge qui puisse conduire à cette situation.

Nom : **Prénom :**

DEUXIEME PARTIE : EXERCICES

Question 1 (5 points) :

Supposons que 1 W suffise à porter un fil de cuivre à sa température de fusion. Sachant que sa resistivité est de 3.14 10^{-8} $\Omega\, m^{+1}$ et que sa longueur est de 1 cm, quelle doit être le rayon de sa section circulaire pour qu'il se rompe lors du passage d'un courant d'intensité 10 A?

Si $I = 10\,A$ et $P = 1\,W$

alors $P = RI^2 = 1 = R\,10^2 \rightarrow R = 10^{-2}\,\Omega$

Donc $10^{-2} = R = \rho \frac{L}{A} = 3.14\ 10^{-8}\ \frac{10^{-2}}{A}$

$\rightarrow A = 3.14\,10^{-8}\ \frac{10^{-2}}{10^{-2}} = 3.14\ 10^{-8}\ m^2$

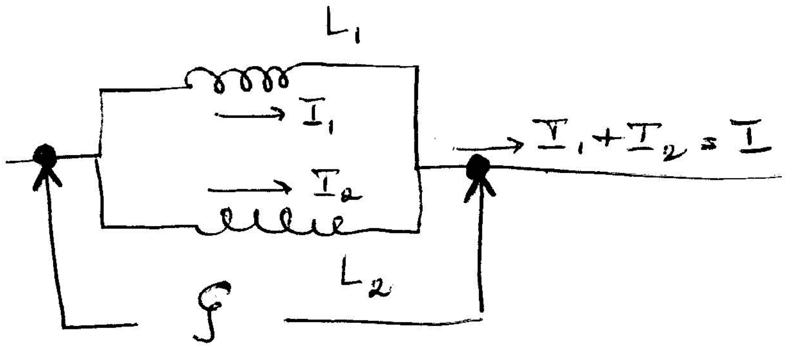
mais $A = \pi r^2 = 3.14\ 10^{-8}\ m^2 \rightarrow r^2 = 10^{-8}\ m^2$

$r = 10^{-4}\ m$

$= 0.1\ mm.$

Question 2 (5 points) :

En utilisant les lois de Kirchhoff et la définition de l'auto-inductance L, démontrer que la loi d'addition des auto-inductances pour deux bobines montées en parallèle est $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$.



$$\mathcal{E} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{(loi des noeuds)}$$

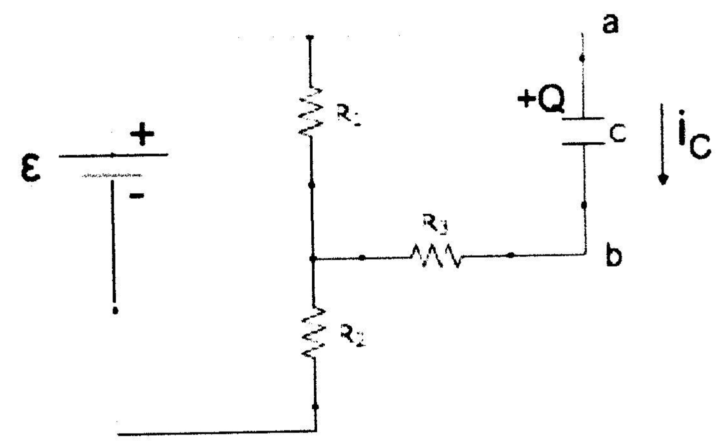
donc $\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}$

$$\Rightarrow -\frac{\mathcal{E}}{L} = -\frac{\mathcal{E}}{L_1} - \frac{\mathcal{E}}{L_2} \qquad \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

auto inductance equivalente

Question 3 (28 points) :

Soit le circuit suivant constitué d'une pile de f.c.m. ε, de trois résistances R_1, R_2, et R_3, et d'un condensateur de capacité C :



a) [5 pts] Calculez-en le circuit équivalent vu par le condensateur en utilisant le théorème de Thévenin.

b) [3 pts] Grâce au circuit équivalent de Thévenin, écrivez la relation liant ξ_{Th}, R_{Th}, $(V_a - V_b)$ et i_C

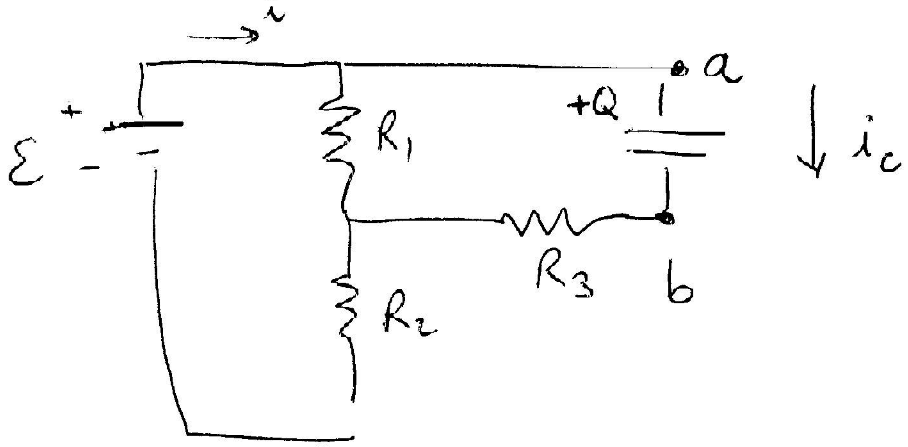
c) [7 pts] Retrouvez la relation entre $V_a - V_b$ et i_C obtenue ci-dessus au moyen des lois de Kirchhoff.

d) [8 pts] Grâce à la relation obtenue à la question (b), écrire l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de la charge du condensateur, et séparez ses variables.

e) [5 pts] Quelle est la constante de temps du circuit RC équivalent ?

[Justifiez toutes vos réponses]

a)



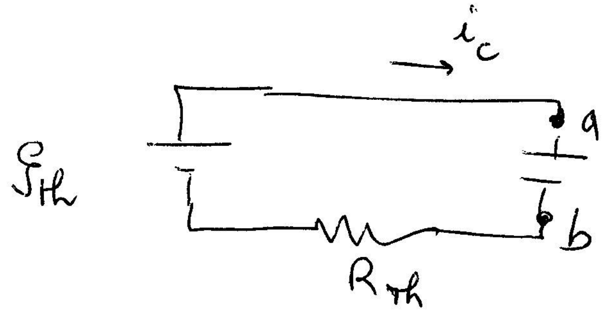
théorème de Thevenin: $\xi_{Th} = V_{ab}$ avec circuit ouvert.

$$\xi_{Th} = R_1\, i = R_1 \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$$

R_{Th}: on court-circuite $\mathcal{E}$: $R_1 \mathbin{//} R_2$ en série avec R_3.

$$\rightarrow \quad R_{Th} = R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

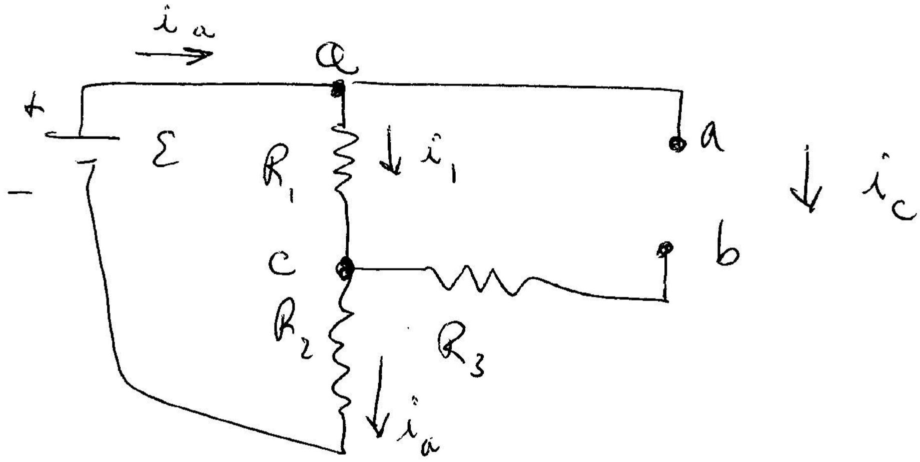
b)



$$\rightarrow R_{Th}\, i_c + V_a - V_b = \xi_{Th}$$

$$\left(R_3 + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \right) i_c + V_a - V_b = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, \mathcal{E}$$

c)



$$i_a = i_1 + i_c \qquad (1)$$

$$R_1 i_1 + R_2 i_a = \mathcal{E} \quad (2)$$

$$R_3 i_c + V_a - V_b = R_1 i_1 \qquad (3)$$

(1) et (2) : $R_1 i_1 + R_2 (i_1 + i_c) = \mathcal{E}$

$$(R_1 + R_2)\, i_1 + R_2 i_c = \mathcal{E}$$

$$i_1 = \frac{\mathcal{E} - R_2 i_c}{R_1 + R_2}$$

Dans (3) : $R_3 i_c + V_a - V_b = R_1 \dfrac{\mathcal{E} - R_2 i_c}{R_1 + R_2}$

$$\left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \right) i_c + (V_a - V_b) = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \mathcal{E}$$

$$\left(R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \right) i_c + (V_a - V_b) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mathcal{E}$$

d) $$\left.\begin{aligned} R_{Th}\, i_c + (V_a - V_b) &= \mathcal{E}_{Th} \\ C(V_a - V_b) &= Q \\ i_c &= \frac{dQ}{dt} \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \quad R_{Th} \frac{dQ}{dt} + (V_a - V_b) = \mathcal{E}_{Th}$$

$$R_{Th} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_{Th}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{R_{Th} C} = \frac{\mathcal{E}_{Th}}{R_{Th}}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}_{Th}\, C}{R_{Th}\, C} - \frac{Q}{R_{Th}\, C}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}_{Th}\, C - Q}{R_{Th}\, C}$$

$$\frac{dQ}{\mathcal{E}_{Th} C - Q} = \frac{dt}{R_{Th} C}$$

$\rightarrow$ constante de temps: $\tau = R_{Th}\, C = \left(R_3 + \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}\right) C$

Question 4 (29 points) :

Un circuit comporte deux des trois éléments suivants: L, R et C, mais on ignore lesquels. Lorsqu'on le branche à une source AC de 120V et 60 Hz, le courant qui le parcourt atteint une intensité de 7.3 A déphasée de +13° par rapport à la tension. On souhaite découvrir quels sont ces deux éléments, savoir comment ils sont agencés (parallèle ou série) et déterminer leurs valeurs. Pour ce faire, on procèdera par étapes:

a) [2] Ecrire les phaseurs du courant et de la tension pour le circuit en question, d'après les éléments mesurés.
b) [4] Posant $Z = |Z|\, e^{j\varphi}$ pour l'impédance du circuit, établir les valeurs de $|Z|$ et φ en vertu de la réponse à la question a)
c) [3] Dessinez les 6 circuits possibles, combinaisons de 2 éléments parmi L, R et C.
d) [6] Ecrivez en regard de chacun de ces circuits leur impédance.
e) [4] Certaines de ces impédances ne peuvent satisfaire aux conditions de l'énoncé. Lesquelles et pourquoi?
f) [10] Pour le(s) circuit(s) ayant une impédance compatible avec les conditions de l'énoncé, utilisez les résultats de la question b) pour calculer les valeurs de ses composants.

a) $v_0 = 120\,V$ $\qquad i_0 = 7.3\,A$

$\varphi_v = 0^\circ$ $\qquad \varphi_i = +13^\circ$

$\rightarrow \hat{v} = 120\, e^{j \cdot 0} \qquad \hat{i} = 7.3\, e^{j\,13^\circ}$

$= 120 \times 1$

b) $\hat{v} = Z\,\hat{i}$ et $Z = |Z|\, e^{j\varphi}$

$\rightarrow \quad 120 = |Z|\, e^{j\varphi}\; 7.3\, e^{j\,13}$

$120 = 7.3\,|Z|\; e^{j(\varphi+13)}$

$\rightarrow$ en egalisant les phases et modules:

$120 = 7.3\,|Z|$ et $0 = \varphi + 13^\circ$

$|Z| = \dfrac{120\,V}{7.3\,A} = 16.438\,\Omega$ et $\varphi = -13^\circ$

Si on pose $Z = \mathrm{Re}\,Z + j\,\mathrm{Im}\,Z$

alors : $\varphi = -13^\circ = \operatorname{arctg} \dfrac{\mathrm{Im}\,Z}{\mathrm{Re}\,Z}$

qui ne peut être satisfaite que

si : $\mathrm{Re}\,Z \neq 0$

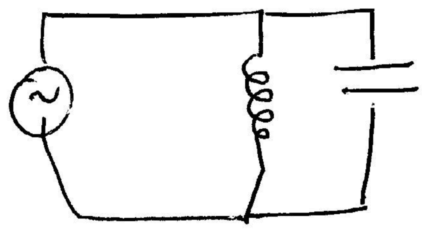
et $\mathrm{Im}\,Z$ et $\mathrm{Re}\,Z$ sont de signe opposé.

c)
d)

Rappels: $Z_R = R \qquad Z_c = \frac{1}{\omega C j} \qquad Z_L = \omega L j$

$$\frac{1}{Z_{//}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \qquad Z_{\text{Serie}} = Z_1 + Z_2$$

①



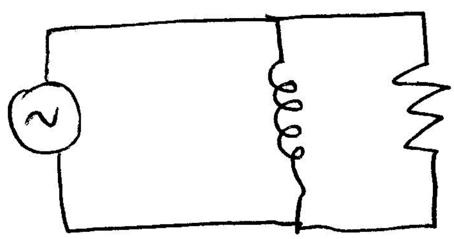
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\omega L j} + \omega C j$$

$$= \left(- \frac{1}{\omega L} + \omega C \right) j$$

et donc $Z = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\omega L} - \omega C}\, j$

telle que $\mathrm{Re}(Z) = 0$.

②



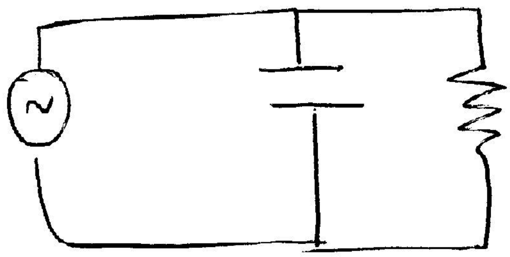
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\omega L j} = \frac{1}{R} - \frac{1}{\omega L} j$$

$$\rightarrow Z = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{\omega L} j}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\omega L} j \right)$$

telle que $\mathrm{Im}\, Z$ et $\mathrm{Re}\, Z$ sont de même signe > 0.

(3)



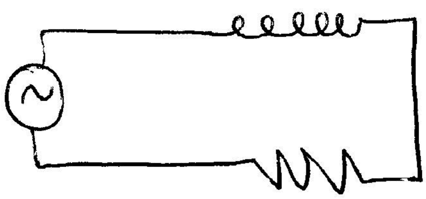
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \omega C j$$

$$\to Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \omega C j}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \left(\frac{1}{R} - \omega C j\right)$$

avec $\mathrm{Re}(Z) > 0$ et $\mathrm{Im}(Z) < 0$.

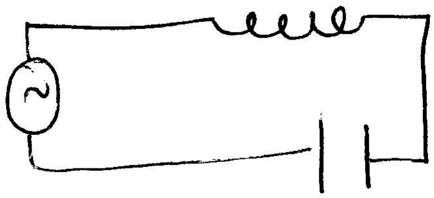
(4)



$$Z = R + \omega L j$$

avec $\mathrm{Im}\, Z$ et $\mathrm{Re}\, Z$ de même signe.

(5)



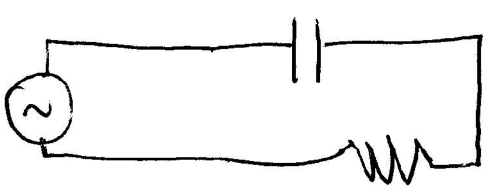
$$Z = \omega L j + \frac{1}{\omega C j}$$

$$= \omega L j - \frac{1}{\omega C} j$$

$$= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j$$

avec $\mathrm{Re}(Z) = 0$.

(6)



$$Z = R + \frac{1}{\omega C j} = R - \frac{1}{\omega C} j$$

avec $\mathrm{Re}(Z) > 0$
et $\mathrm{Im}(Z) < 0$.

e) Les conditions imposées par le déphasage existant entre courant et tension sont (voir question b) :

$\mathrm{Re}(Z) \neq 0$ et $\mathrm{Im}\, Z$ de signe opposé à $\mathrm{Re}\, Z$.

Seuls les circuits RC parallèle ou série satisfont ces conditions en vertu de la question d).

f) circuit 6 : RC série :

$$Z = R - \frac{1}{\omega C} j$$

et donc : $R = \mathrm{Re}(Z) = |Z| \cos(-13)$

$$= 16.438 \times \cos(-13)$$
$$= 16\ \Omega.$$

$$-\frac{1}{\omega C} = \mathrm{Im}(Z) = |Z| \sin(-13)$$
$$= 16.438 \times \sin(-13)$$
$$= -3.698\ \Omega$$

or : $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 60\ s^{-1} = 377\ \mathrm{sec}^{-1}$

$$\longrightarrow \quad C = \frac{1}{\omega \times 3.698} = \frac{1}{377 \times 3.698}$$
$$= \frac{1}{1394} = 7.17\ 10^{-4}\ \mathrm{F}$$
$$= 717\ \mu\mathrm{F}$$

Circuit 3 : RC parallèle :

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \left(\frac{1}{R} - \omega C j \right)$$

or $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{-\omega C}{1/R} = -\omega C R = \operatorname{tg}(-13^\circ)$

$\rightarrow \quad \omega R C = \operatorname{tg} 13^\circ = 0.23.$

or $|Z|^2 = \left(\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2 \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$

$$= \frac{R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

$$= \frac{R^2}{1 + \operatorname{tg}^2 (13^\circ)} = \frac{R^2}{1 + (0.23)^2}$$

$\rightarrow \quad R = |Z| \left(1 + (0.23)^2 \right)^{1/2}$

$= 16.438 \times \left(1 + (0.23)^2 \right)^{1/2}$

$= 17.314 \ \Omega$

et $\omega R C = \operatorname{tg} 13 = 0.23$ avec $\omega = 377 \ \text{sec}^{-1}$

$\rightarrow \quad 377 \times 17.314 \times C = 0.23$

$\rightarrow \quad C = \frac{0.23}{377 \times 17.314} = \frac{0.23}{6527.4} = 3.52 \ 10^{-5} \ F$

$= 35.2 \ \mu F.$