PHYS-F304
Spectrophysique et Astrophysique

Sophie Van Eck

21 février 2018

Plan du cours

1. Transfert radiatif
2. Propriétés du rayonnement de corps noir
3. Corps noir et photométrie
4. Introduction à l'astrophysique stellaire
5. Spectres stellaires et classification spectrale
6. Notre Galaxie
7. Les phases du milieu interstellaire
8. Astronomie extragalactique

Chap. 1 : transfert radiatif

L'intensité spécifique et ses moments

- **Intensité spécifique**

$$\delta\mathcal{E} = I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)dA\cos\theta d\Omega d\nu dt \qquad (1)$$

Unités : $[I] = \mathrm{erg\ cm^{-2}\ s^{-1}\ Hz^{-1}\ steradian^{-1}}$ ou $[I] = \mathrm{W\ m^{-2}\ Hz^{-1}\ steradian^{-1}}$.

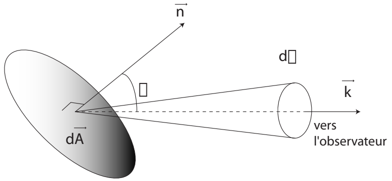


FIGURE: L'intensité spécifique.

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \qquad (2)$$

L'intensité spécifique et ses moments

- **Intensité moyenne**

Moment d'ordre zéro de l'intensité spécifique :

$$
\begin{aligned}
J(\vec{r},\nu,t) &= \frac{\oint_{4\pi} I(\vec{r},\theta,\nu,t)d\Omega}{\oint_{4\pi} d\Omega} && (3)\\
&= \frac{1}{4\pi}\oint_{4\pi} I(\vec{r},\theta,\nu,t)d\Omega && (4)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I_\nu \sin\theta d\theta d\varphi && (5)
\end{aligned}
$$

Pour un rayonnement *isotrope*, $J(\nu,t) = I(\nu,t)$

L'intensité spécifique et ses moments

- **Densité d'énergie**

$$\delta\mathcal{E} = I(\vec{r},\vec{n},\nu,t)\; dA\cos\theta d\Omega d\nu dt = \frac{1}{c} I(\vec{r},\vec{n},\nu,t) dV d\Omega d\nu \quad (6)$$

$$\mathcal{E}(\vec{r},\nu,t)d\nu = \frac{1}{c}\left[\int_V dV \oint I(\vec{r},\vec{n},\nu,t)d\Omega\right] d\nu \quad (7)$$

$$u_\nu = u(\vec{r},\nu,t) = \frac{1}{c}\oint I(\vec{r},\vec{n},\nu,t)d\Omega = \frac{4\pi}{c} J(\vec{r},\nu,t) \quad (8)$$

La densité d'énergie totale est :

$$u = u(\vec{r},t) = \int_0^\infty u(\vec{r},\nu,t)d\nu = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty J(\vec{r},\nu,t)d\nu = \frac{4\pi}{c} J(\vec{r},t) \quad (9)$$

L’intensité spécifique et ses moments

- **Flux**

Moment d’ordre 1 de l’intensité spécifique

$$\vec{\mathcal{F}} = \oint I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)\vec{\mathrm{n}}d\Omega \tag{10}$$

Unités : ergs cm^{-2} sec^{-2} hz^{-1}, ou J m^{-2}s^{-1} hz^{-1}, ou W m^{-2}hz^{-1}.
Atmosphère plane :

$$\mathcal{F}_z = \oint I n_z d\Omega \tag{11}$$

Or $n_z = \cos\theta = \mu$ et $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi = -d\mu d\varphi$.
Donc

$$\mathcal{F}(z, \nu, t) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu, t)\mu d\mu \tag{12}$$

Flux compté positivement vers l’extérieur.

L'intensité spécifique et ses moments

- **Flux**

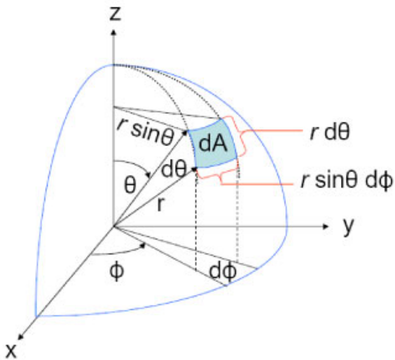


FIGURE: Surface élémentaire intersectée par l'angle solide $d\Omega$ en coordonnées sphériques (θ, φ)

L'intensité spécifique et ses moments

- **Flux :** $\mathcal{F}^+(z,\nu,t)$ **et** $\mathcal{F}^-(z,\nu,t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(z,\nu,t) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_\nu(\pi-\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \mathcal{F}^+(z,\nu,t) - \mathcal{F}^-(z,\nu,t) \qquad (13)
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{F}^-(z,\nu,t)$ et $\mathcal{F}^+(z,\nu,t)$ >0.
Rayonnement isotrope : $\mathcal{F}_\nu^+ = \mathcal{F}_\nu^- = \pi I_\nu$ et $\mathcal{F}_\nu = 0$.
Flux = mesure de l'anisotropie du champ de rayonnement.

L'intensité spécifique et ses moments

• **Flux :** $\mathcal{F}^{+}(z,\nu,t)$ **et** $\mathcal{F}^{-}(z,\nu,t)$, symétrie axiale (indépendance par rapport à φ) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(z,\nu,t) &= 2\pi \int_0^{\pi} I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{1} \mu I_\nu d\mu - 2\pi \int_0^{-1} \mu I_\nu d\mu \\
&= \mathcal{F}^{+}(z,\nu,t) - \mathcal{F}^{-}(z,\nu,t) \qquad (14)
\end{aligned}$$

L'intensité spécifique et ses moments

• **Flux émis par une étoile sphérique** (ne recevant aucun flux de l'extérieur) par unité de surface à $r = R$:

$$\mathcal{F}^+(z, \nu, t)(r = R) = \mathcal{F}^{\text{surface}}(z, \nu, t) = \pi \overline{I_\nu^+} \tag{15}$$

où $\overline{I_\nu^+}$ = intensité moyennée sur le disque stellaire reçue par un observateur distant.

- *Flux astrophysique F_A* :

$$F_A(z, \nu, t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}(z, \nu, t) \tag{16}$$

ainsi :

$$F_A = \overline{I^+}$$

L'intensité spécifique et ses moments

- *Flux d'Eddington* :

$$H(z,\nu,t) = \frac{1}{4\pi}\mathcal{F}(z,\nu,t) \tag{17}$$

$$\vec{H}(\vec{r},\nu,t) = \frac{\oint_{4\pi} I(\vec{r},\theta,\nu,t)\vec{\mathrm{n}}d\Omega}{\oint_{4\pi} d\Omega} \tag{18}$$

= moment d'ordre 1 de l'intensité spécifique
Symmétrie radiale :

$$\begin{aligned} H(z,\nu,t) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} \mu I(z,\mu,\nu,t)d\mu \quad (19)\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mu I(z,\mu,\nu,t)d\mu \quad (20)\end{aligned}$$

L’intensité spécifique et ses moments

Exemple : Flux du Soleil au-dessus de l’atmosphère terrestre = constante solaire :

$$\mathcal{F}_{\odot}^{+} \equiv \epsilon_{\odot} = 1.36\ \mathrm{kW} \cdot \mathrm{m}^{-2} = 1.36 \times 10^{3} \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2}. \qquad (21)$$

L'intensité spécifique et ses moments

- Décroissance du flux en l'inverse du carré de la distance :

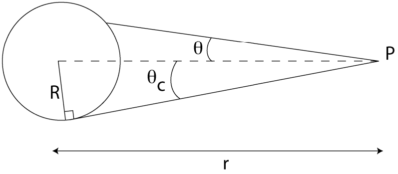


FIGURE: Flux émis par une sphère d'intensité uniforme B

L'intensité spécifique et ses moments

- Décroissance du flux en l'inverse du carré de la distance :

Comme $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\mathcal{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_c} B \sin\theta \cos\theta d\theta \quad (22)$$

où $\theta_c = \arcsin(R/r)$. Donc

$$\mathcal{F} = 2\pi B \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\arcsin(R/r)} = \pi B \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (23)$$

Donc :

- l'intensité spécifique est constante
- le flux décroit en raison de la décroissance de l'angle solide sous-tendu par l'objet.
- flux à la surface de l'objet (r=R) :

$$\mathcal{F} = \pi B \quad (24)$$

L'intensité spécifique et ses moments

• Luminosité = quantité d'énergie quittant la surface de l'étoile par unité de temps

$$\begin{aligned} L &= \int_{\Sigma} dA \int_0^{\infty} \mathcal{F}_\nu^+ d\nu \qquad (25) \\ &= 4\pi R^2 \mathcal{F}^+ \qquad (26) \end{aligned}$$

• Eclairement ou flux reçu = puissance reçue par unité de surface collectrice de lumière orientée perpendiculairement à la ligne de visée, hors atmosphère.
$\mathrm{W \cdot m^{-2} = J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}}$.
• Si l'émission est isotrope et qu'il n'y a pas d'absorption du rayonnement entre l'astre et l'observateur, toute la luminosité L de l'astre est transmise à la distance D de manière uniforme à travers une sphère de surface $4\pi D^2$. Donc le flux reçu d'une étoile de luminosité L située à une distance D est :

$$F = \frac{L}{4\pi D^2} \qquad (27)$$

L'intensité spécifique et ses moments

• **Pression de radiation** P_ν

$f_R(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)$ = **fonction de distribution des photons**

Le nombre de photons traversant l'élément de surface $d\vec{A}$ pendant le temps dt :

$$f_R\ cdt\ d\vec{A}.\vec{n}\ d\Omega d\nu \tag{28}$$

donc l'énergie transportée est :

$$h\nu\ c\ f_R dA cos\theta d\Omega d\nu dt \tag{29}$$

et par comparaison avec l'Eq.1 :

$$I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) = ch\nu\ f_R(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) \tag{30}$$

Nombre de photons traversant une surface unité perpendiculaire à l'axe de coordonnée i, par unité de temps : $cf_{\mathrm{R}}(\vec{n,\nu})n^i = I(\vec{n})/(h\nu)$.

L'intensité spécifique et ses moments

- **Pression de radiation** P_ν

$$\begin{aligned} \text{pression} &= \text{force}/\text{surface} \\ &= \text{masse} \times \text{acceleration}/\text{surface} \\ &= \frac{d}{dt}(\text{masse} \times \text{vitesse})/\text{surface} \\ &= \frac{d}{dt}(\text{quantite de mouvement})/\text{surface} \end{aligned}$$

Chaque photon possède une quantité de mouvement $(h\nu/c)n^j$ dans la direction j donc

$P_\nu^{ij} = \oint_{4\pi} f_{\mathrm{R}}(\vec{n},\nu)(cn^i)(h\nu/c)n^j d\Omega$

$P_\nu^{ij} = \frac{1}{c}\oint_{4\pi} I_\nu(\vec{n})n^i n^j d\Omega \quad$ [erg/cm^3/Hz]

L'intensité spécifique et ses moments

En notation dyadique,

$$\mathbf{P}_\nu = \frac{1}{c} \oint_{4\pi} I_\nu(\vec{n})\vec{n}\vec{n} d\Omega. \tag{31}$$

En intégrant sur la fréquence, on obtient le tenseur de pression de radiation :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint_{4\pi} I_\nu(\vec{n})\vec{n}\vec{n} d\Omega \quad [erg/cm^3]. \tag{32}$$

Moment d'ordre 2 de l'intensité spécifique :

$$\mathbf{K}(\vec{r}, \nu, t) \quad = \quad \frac{\oint_{4\pi} I(\vec{r}, \theta, \nu, t)\vec{\mathrm{n}}.\vec{\mathrm{n}} d\Omega}{\oint_{4\pi} d\Omega} \tag{33}$$

Donc

$$\mathbf{P}(r, \nu, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}(\vec{r}, \nu, t) \tag{34}$$

L'intensité spécifique et ses moments

Cas particuliers :

- Rayonnement isotrope :

$$
\begin{aligned}
p(r,\nu,t) &= \frac{1}{c}\oint I(\vec{r},\vec{n},\nu,t)cos^2\theta d\Omega \\
&= \frac{1}{c}J(\vec{r},\nu,t)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1}\mu^2 d\mu \\
&= \frac{1}{c}J(\vec{r},\nu,t)\, 2\pi\, \frac{2}{3} \\
&= \frac{4\pi}{c}J(\vec{r},\nu,t)\frac{1}{3} \\
p(r,\nu,t) &= \frac{1}{3}u(\vec{r},\nu,t) = \frac{1}{3}u_\nu \qquad (35)
\end{aligned}
$$

- Rayonnement isotrope + ET :

$$p^*(z,\nu,t) = \frac{1}{3}u^*(z,\nu,t) = \frac{4\pi}{3c}B_\nu(T) = \frac{4\sigma}{3c}T^4 \qquad (36)$$

L'intensité spécifique et ses moments

- **Accélération radiative**

Lors d'un processus d'absorption, les photons communiquent aux atomes l'énergie (Eq. 1) :

$$
\begin{aligned}
d(\delta\mathcal{E}^{\mathrm{abs}}) &= dI_\nu \, dA \, \cos\theta \, d\Omega \, d\nu \, dt & (37)\\
&= (\kappa_\nu \, I_\nu \, ds) \, dA \, \cos\theta \, d\Omega \, d\nu \, dt & (38)
\end{aligned}
$$

L'énergie absorbée totale est (en utilisant l'Eq. 11, et en supposant κ_ν indépendant de $d\Omega$) :

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{E}^{\mathrm{abs}} &= \int_0^\infty \kappa_\nu \left(\int_{4\pi} I_\nu \, \cos\theta \, d\Omega \right) d\nu \, dA \, dt \, ds & (39)\\
&= \int_0^\infty \kappa_\nu \, \mathcal{F}_\nu \, d\nu \, dA \, dt \, ds & (40)
\end{aligned}
$$

L'impulsion communiquée aux atomes est :

$$
dp = \frac{\delta\mathcal{E}^{\mathrm{abs}}}{c} \qquad (41)
$$

L'intensité spécifique et ses moments

La force résultante est :

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{rad}} &= \frac{dp}{dt} && (42) \\ &= \frac{1}{c}\int_0^\infty \kappa_\nu \, \mathcal{F}_\nu \, d\nu \, dA \, ds && (43) \\ &= \frac{1}{\rho c}\int_0^\infty \kappa_\nu \, \mathcal{F}_\nu \, d\nu \, dm && (44) \\ &= g_{\mathrm{rad}} \, dm && (45) \end{aligned}$$

avec $dm = \rho \, dA \, ds$. Donc (avec l'Eq. 17) :

$$\boxed{g_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{\rho c}\int_0^\infty \kappa_\nu \, \mathcal{F}_\nu \, d\nu = \frac{4\pi}{\rho c}\int_0^\infty \kappa_\nu \, H_\nu \, d\nu} \qquad (46)$$

Interaction lumière - matière

• **Coefficient d'extinction** = opacité

$$\delta\mathcal{E} = \chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) dA ds d\Omega d\nu dt \tag{47}$$

Dimension : cm^{-1}

$1/\chi_\nu$ (cm) = libre parcours moyen du photon.

• **Absorption et diffusion**

$$\chi(\vec{r}, \nu, t) = \kappa(\vec{r}, \nu, t) + \sigma(\vec{r}, \nu, t) \tag{48}$$

Interaction lumière - matière

- **Le coefficient d'émission**

$$\delta\mathcal{E} = j(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) dAdsd\Omega d\nu dt \quad (49)$$

Unités : erg cm^{-3} ster^{-1} Hz^{-1} s^{-1}
$r_1 \approx r_2 \ll ds$: on assimile le cône tronqué à un cylindre :

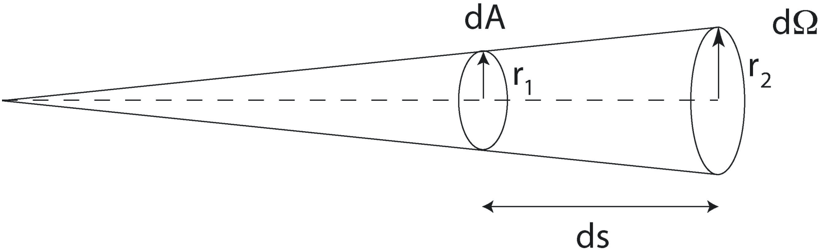


FIGURE: L'angle solide élémentaire tronqué est une portion de cône élémentaire qui peut être assimilée à un cylindre élémentaire

Interaction lumière - matière

- Donc :

$$dI(\vec{r}, \nu, t) = j(\vec{r}, \nu, t)ds \tag{50}$$

Emission isotrope si :

- milieu statique, sans direction privilégiée
- Element de matière isotrope
- Champ de rayonnement isotrope

NB : le problème du transfert de rayonnement n'est pas résolu par la connaissance de j et χ !

Interaction lumière - matière

- **L'équation de transfert**

$$\begin{aligned}\left[I(\vec{r}+\Delta\vec{r},\vec{n},\nu,t+\Delta t)-I(\vec{r},\vec{n},\nu,t)\right]\, dA d\Omega d\nu dt \\ = j(\vec{r},\vec{n},\nu,t) dA ds d\Omega d\nu dt \\ -\chi(\vec{r},\vec{n},\nu,t) I(\vec{r},\vec{n},\nu,t) dA ds d\Omega d\nu dt\end{aligned} \quad (51)$$

et comme $c\Delta t = \Delta s$:

$$I(\vec{r}+\Delta\vec{r},\vec{n},\nu,t+\Delta t) = I(\vec{r},\vec{n},\nu,t) + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial s}\right) ds \quad (52)$$

Donc :

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right) I(\vec{r},\vec{n},\nu,t) = j(\vec{r},\vec{n},\nu,t) - \chi(\vec{r},\vec{n},\nu,t) I(\vec{r},\vec{n},\nu,t) \quad (53)$$

Interaction lumière - matière

Coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial I}{\partial s} = \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) \qquad (54)$$

Etat stationnaire et pour une atmosphère plane-parallèle (avec $\partial z/\partial s = cos\theta = \mu$) :

$$\mu\frac{\partial I(z,\vec{n},\nu)}{\partial z} = j(z,\vec{n},\nu) - \chi(z,\vec{n},\nu,t)I(z,\vec{n},\nu) \qquad (55)$$

z augmente de la base de l'atmosphère vers l'extérieur de l'étoile.

• **Constance de l'intensité spécifique dans le vide**

Dans le vide, $\chi_\nu = j_\nu = 0$, donc $I_\nu =$constante.

Interaction lumière - matière

- **Fonction source**

$$S(z,\nu) = j(z,\nu)/\chi(z,\nu) \tag{56}$$

Donc :

$$\frac{\mu}{\chi_\nu}\frac{\partial I_\nu}{\partial z} = S_\nu - I_\nu \tag{57}$$

A l'équilibre thermodynamique $\quad S_\nu = I_\nu = B_\nu \quad (58)$

Interaction lumière - matière

- **Epaisseur optique**

$$d\tau_\nu(s) = \chi_\nu(s)ds \qquad \text{ou encore} \qquad \tau_\nu(D) = \int_0^D \chi_\nu(s)ds \tag{59}$$

$\tau_\nu(D)$ = nombre de libres parcours moyens de photons de fréquence ν pour un faisceau lumineux traversant un milieu d'épaisseur (géométrique) D.
Donc :

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \tag{60}$$

ou s (et donc τ) est mesuré le long de la direction de propagation ($\mu = 1$).

Interaction lumière - matière

Si pas d'émission, alors $S_\nu = 0$.

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(D)} \tag{61}$$

- $\tau_\nu(D) \gg 1$: grande extinction : optiquement épais
- $\tau_\nu(D) \ll 1$: faible extinction : optiquement mince

Interaction lumière - matière

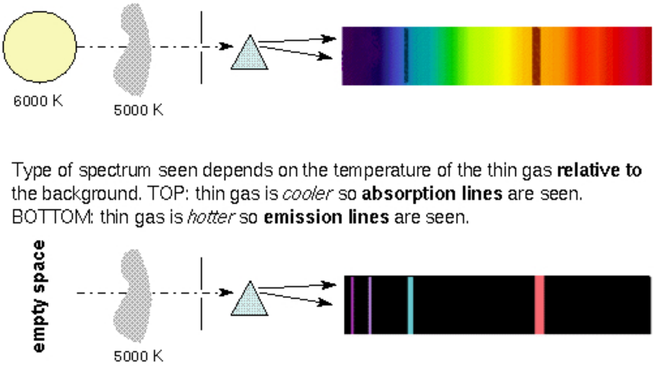
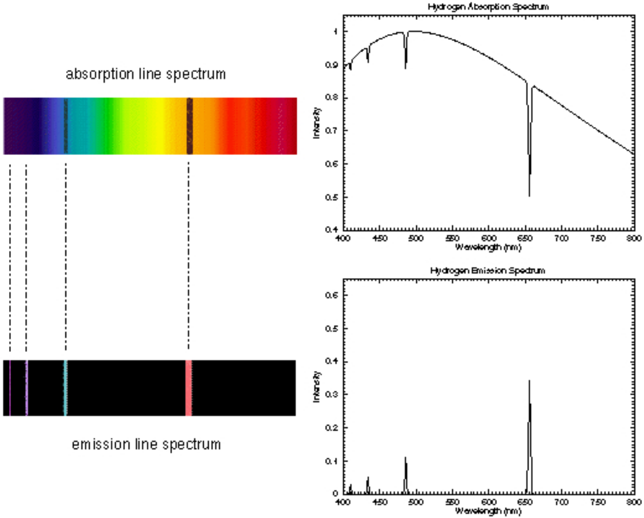


FIGURE: Copyrighted, 1998 - 2006 by Nick Strobel-
www.astronomynotes.com

Interaction lumière - matière



Two ways of showing the same spectra: on the **left** are pictures of the dispersed light and on the **right** are plots of the intensity vs. wavelength. Notice that the pattern of spectral lines in the absorption and emission line spectra are the **same** since the gas is the same.

Interaction lumière - matière

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} e^{\tau_\nu} + I_\nu e^{\tau_\nu} &= S_\nu e^{\tau_\nu} \\
\frac{\partial}{\partial \tau_\nu}(I_\nu e^{\tau_\nu}) &= S_\nu e^{\tau_\nu} \\
I_\nu e^{\tau_\nu} - I_\nu(0) &= \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{t_\nu} dt_\nu \\
I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(\tau_\nu - t_\nu)} dt_\nu \quad (62)
\end{aligned}$$

Si S_ν isotrope :

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(D)} + S_\nu \left(1 - e^{-\tau_\nu(D)}\right) \quad (63)$$

Interaction lumière - matière

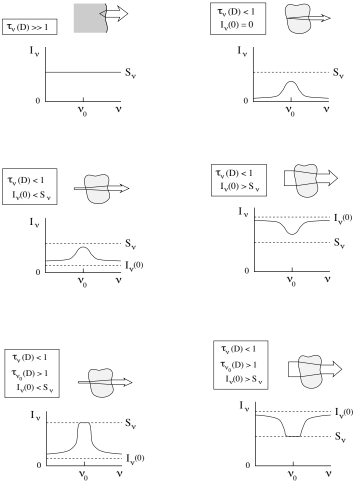


FIGURE: Intensité émergeant d'un milieu homogène où S_ν est constante partout.(Rutten)

Interaction lumière - matière

- $\tau_\nu \gg 1$: cas optiquement épais. Si

$$\lim_{\tau_\nu \to \infty} I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(D)/\mu} = 0 \tag{64}$$

alors $I_\nu(D) \approx S_\nu$.
A l'ETL, $I_\nu(D) \approx B_\nu$.
L'intensité émergeante est indépendante de l'opacité du milieu (corps noir).

Interaction lumière - matière

- $\tau_\nu \ll 1$: cas optiquement mince

$$e^{-\tau_\nu} \approx 1 - \tau_\nu \qquad \text{pour} \qquad \tau_\nu \ll 1$$

Donc :

$$I_\nu(D) = I_\nu(0)(1 - \tau_\nu) + \tau_\nu S_\nu \tag{65}$$

- Si $I_\nu(0) = 0$, alors $I_\nu(D) = \tau_\nu S_\nu$.
  A l'ETL, $S_\nu = B_\nu$.
  Pas de diffusion ($\chi_\nu = \kappa_\nu$)
  κ_ν est constant le long de s, donc $\tau_\nu = \kappa_\nu s$

$$I_\nu(D) = \kappa_\nu s B_\nu \tag{66}$$

$\rightarrow$ raies en émission

Interaction lumière - matière

- $\tau_\nu \ll 1$: cas optiquement mince
  - Si $I_\nu(0) \neq 0$,
    alors $I_\nu(D) = I_\nu(0) - \tau_\nu(I_\nu(0) - S_\nu)$.
    Si $I_\nu(0) - S_\nu > 0$: raies en absorption

Interaction lumière - matière

• **Profondeur optique**
Atmosphère uni-dimensionnelle (plans-parallèles) indépendante du temps

$$\tau(z,\nu) = \int_z^{\infty} \chi(z',\nu)dz' \tag{67}$$

- z est la coordonnée du point envisagé dans l'atmosphère,
- $z = \infty$ est la coordonnée de l'oeil de l'observateur
- z augmente vers l'extérieur

$$d\tau(z,\nu) = -\chi(z,\nu)dz \tag{68}$$

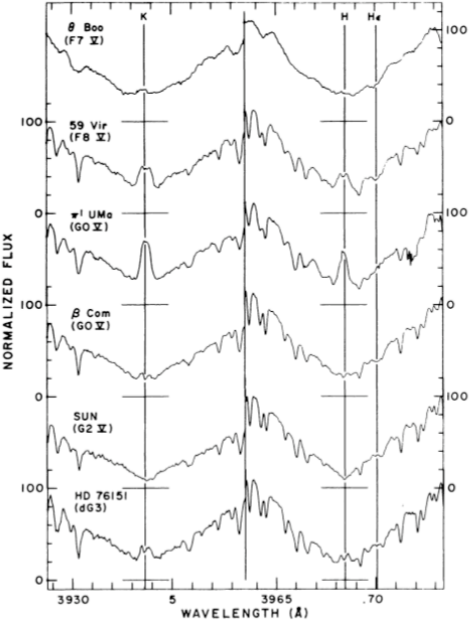
Interaction lumière - matière

- **Equation de transfert**

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \tag{69}$$

  - Si extinction seule : $\frac{dI_\nu}{I_\nu} = \frac{d\tau_\nu}{\mu}$
    donc $I_\nu(\tau_\nu = 0) = I_\nu(\tau_\nu = T)e^{-T/\mu}$
  - Si émission seule : $\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = j_\nu$
    donc $I_\nu(Z) = I_\nu(0) + \frac{1}{\mu}\int_0^Z j_\nu(z)dz$
    (raies interdites dans les nébuleuses)
  - Emission dans le coeur des raies

Interaction lumière - matière



Interaction lumière - matière

- **Solution formelle de l'équation de transfert**

Atmosphère 1-D (plans-parallèles)

$$\frac{\partial}{\partial \tau_\nu}\left(I_\nu e^{-\tau_\nu/\mu}\right) = -\frac{1}{\mu} S_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} \tag{70}$$

$$\left[I_\nu e^{-\tau_\nu/\mu}\right]_{\tau_1}^{\tau_2} = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu e^{-t/\mu} dt/\mu \tag{71}$$

$$I(\tau_1, \mu, \nu) = I(\tau_2, \mu, \nu) e^{-(\tau_2-\tau_1)/\mu} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu(t) e^{-(t-\tau_1)/\mu} dt/\mu \tag{72}$$

Interaction lumière - matière

• **atmosphère semi-infinie** = milieu qui a une frontière définie d'un côté (vers l'espace)

- *Intensité incidente* $I^-(\mu, \nu)$ (pour laquelle $\mu \leq 0$) :
  Conditions aux limites $\tau_2 = 0$ et $I(\tau_2 = 0, \mu, \nu) = 0$:

$$I^-(\tau_\nu, \mu, \nu) = -\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) e^{-(t-\tau_\nu)/\mu} dt/\mu \tag{73}$$

- *Intensité émergeante* $I^+(\mu, \nu)$ (pour laquelle $\mu \geq 0$) :
  Conditions aux limites $\tau_1 = \tau_\nu$ et $\tau_2 = \infty$ et en supposant

$$\lim_{\tau_\nu \to \infty} I(\tau_\nu, \mu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} = 0 \tag{74}$$

$$I^+(\tau_\nu, \mu, \nu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t) e^{-(t-\tau_\nu)/\mu} dt/\mu \tag{75}$$

Interaction lumière - matière

- Cas particulier : Intensité émergeante vue par un observateur extérieur ($\tau_\nu = 0$) :

$$I^+(0, \mu, \nu) = \int_0^\infty S_\nu(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \tag{76}$$

L'intensité émergeante = moyenne pondérée de la fonction source
Facteur pondérant (pour chaque profondeur optique t) = fraction de l'intensité qui parvient de la profondeur optique t jusqu'à la surface
L'Eq. 76 est la *transformée de Laplace* de la fonction source.

Interaction lumière - matière

- **Les coefficients d'Einstein pour les transitions liées-liées**

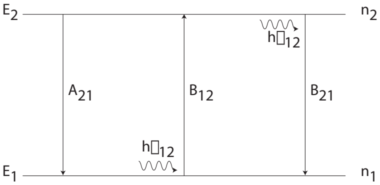


FIGURE: Les coefficients d'Einstein

Interaction lumière - matière

- **Processus radiatifs entre 2 niveaux** déterminés par :
  - Population de l'état initial : Déterminée, à l'ETL, par
    - la distribution de Boltzmann
    - la largeur non nulle des niveaux $\Delta\nu$:
      profil d'absorption ϕ_ν, *profil d'émission* ψ_ν (normalisés) :

$$\int \phi_\nu d\nu = \int \psi_\nu d\nu = 1 \tag{77}$$

      Nombre d'atome capables d'absorber des photons de fréquence ν : $N_1(\nu) = N_1\phi_\nu$.
      Nombre d'atomes capables d'émettre des photons de fréquence ν : $N_2(\nu) = N_2\psi_\nu$
  - la probabilité de la transition de l'état initial vers l'état final ; celle-ci est caractérisée par les coefficients d'Einstein.

Interaction lumière - matière

- **3 processus radiatifs :**
  - **L'émission spontanée** : $2 \rightarrow 1$; émission d'énergie $h\nu_{12}$.
    Nombre de transition par seconde : $N_2\psi_\nu A_{21}$.
    Cette émission est isotrope.
  - **L'absorption** : $1 \rightarrow 2$ en présence d'un rayonnement ν_{12} ; absorption d'énergie $h\nu_{12}$.
    Nombre de transitions par seconde : $I_{\nu_{12}} N_1 \phi_\nu B_{12}$.
  - **L'émission induite** : $2 \rightarrow 1$ en présence d'un rayonnement ν_{12}, et d'intensité $I_{\nu_{12}}$; émission d'énergie $h\nu_{12}$.
    Nombre de transitions par seconde : $I_{\nu_{12}} N_2 \psi_\nu B_{21}$.

Interaction lumière - matière

- Remarques :
  - ψ_ν(émission induite) = ψ_ν (émission spontanée)
  - Emission induite parfois considérée comme une *absorption négative*, mais en général, $\psi_\nu \neq \phi_\nu$.

Interaction lumière - matière

- **A l'ETL :**
  - $I_\nu = J_\nu = B_\nu(T)$
    On peut montrer qu'alors $\psi_\nu = \psi_\nu^* = \phi_\nu$
  - Equation de Boltzmann valide :

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^* = \frac{g_2 e^{-E_2/kT}}{g_1 e^{-E_1/kT}} = \frac{g_2}{g_1}\, e^{-h\nu_{12}/kT} \qquad (78)$$

  - Même quand le système macroscopique n'est pas à l'ETL, on peut définir sa *température d'excitation* $T_{\rm exc}$ par :

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right) = \frac{g_2}{g_1}\, e^{-h\nu_{12}/kT_{\rm exc}} \qquad (79)$$

Interaction lumière - matière

- **A l'ETL :**
  - Populations des niveaux indépendantes du temps

$$N_2^* A_{21} + J^*_{\nu_{12}} N_2^* B_{21} = J^*_{\nu_{12}} N_1^* B_{12} \tag{80}$$

$$J^*_{\nu_{12}} = \frac{A_{21}}{\frac{N_1^*}{N_2^*} B_{12} - B_{21}} = \frac{A_{21}}{\frac{g_1}{g_2} e^{h\nu_{12}/kT} B_{12} - B_{21}} \tag{81}$$

$$= \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2} \frac{B_{12}}{B_{21}} e^{h\nu_{12}/kT} - 1} \tag{82}$$

qui doit être égale (ETL) à la densité d'énergie de Planck :

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{83}$$

Interaction lumière - matière

- Les deux densites d'énergie doivent être égales quelque soit la température T, donc :

$$B_{12} g_1 = B_{21} g_2 \tag{84}$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \tag{85}$$

Remarques :

- Coefficients d'Einstein indépendants du temps et caractéristiques de l'atome considéré
- Relations précédentes valables hors-ETL

Interaction lumière - matière

- On peut ré-écrire l'Eq. 80 comme :

$$N_2 A_{21} = N_1 I_{\nu_{12}} \left[B_{12} - \frac{N_2}{N_1} B_{21} \right] = N_1 I_{\nu_{12}} B_{12} \left[1 - \frac{g_1}{g_2} \frac{N_2}{N_1} \right] \quad (86)$$

  - A l'ET, l'émission induite $\frac{g_1}{g_2}\frac{N_2}{N_1} = e^{-h\nu/kT}$ est négligeable pour $h\nu/kT \gg 1$ (condition de validité de la loi de Wien).
  - L'émission induite peut être importante si N_2 excède sa valeur à l'équilibre thermodynamique.
    L'émission induite dépasse l'absorption si $N_2 g_1 > N_1 g_2$. $\rightarrow$ *inversion de population* : condition nécessaire pour l'effet laser ou maser.
    $T_{\rm exc} < 0$ et $e^{-h\nu/kT_{\rm exc}} > 1$
    Cette condition est plus facile à réaliser si $h\nu \ll kT$ donc aux fréquences radio, (maser astrophysiques).

Interaction lumière - matière

- Le rapport entre l'émission induite et l'émission spontanée est :

$$\frac{I_{\nu_{12}} B_{21}}{A_{21}} = I_{\nu_{12}} \frac{\lambda^3}{2hc} \tag{87}$$

A densité d'énergie électromagnétique constante, l'importance relative de l'émission induite par rapport à l'émission spontanée croît comme λ^3. Le maser a été plus facile à réaliser que le laser : dans le domaine des micro-ondes, l'émission induite domine l'émission spontanée pour des intensités de rayonnement que l'on peut atteindre facilement.

Interaction lumière - matière

- En physique statistique : coefficients d'Einstein souvent définis en terme de densité d'énergie électromagnétique u_ν plutôt qu'en terme d'intensité moyenne J_ν. Comme

$$u_\nu = u(\vec{r}, \nu, t) = \frac{1}{c} \oint I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) d\Omega = \frac{4\pi}{c} J(\vec{r}, \nu, t) \tag{88}$$

$$B^{J_\nu}_{(12,21)} J_\nu = B^{u_\nu}_{(12,21)} u_\nu \tag{89}$$

et donc

$$B^{J_\nu}_{(12,21)} = \frac{4\pi}{c} B^{u_\nu}_{(12,21)} \tag{90}$$

$$A^{J_\nu}_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B^{J_\nu}_{12} \tag{91}$$

Interaction lumière - matière

- **Lien entre les coefficients d'Einstein et les coefficients d'extinction et d'émission**
  - Coefficient d'émission
    Emission spontanée :
    nombre de transition par unité de temps : $N_2\psi_\nu A_{21}$.
    Chaque unité de temps, émission de l'énergie $h\nu N_2\psi_\nu A_{21}$.
    Mais le photon émis de manière équiprobable dans tout l'angle solide total 4π.

$$\frac{dE}{dAdsd\Omega d\nu dt} = j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} N_2\psi_\nu A_{21} \tag{92}$$

Interaction lumière - matière

• Lien entre les coefficients d'Einstein et les coefficients d'extinction et d'émission

- Coefficient d'extinction, corrigé de l'émission induite
  Coefficient d'extinction (Eq.47) :

$$\frac{dE}{dA ds d\Omega d\nu dt} = \chi_\nu I_\nu \tag{93}$$

On considère ici le coefficient d'extinction *net*, c'est-à-dire corrigé de l'émission induite :

$$\begin{aligned}
\chi_\nu^{\mathrm{net}} I_\nu &= \frac{h\nu}{4\pi} N_1 \phi_\nu B_{12} I_\nu - \frac{h\nu}{4\pi} N_2 \psi_\nu B_{21} I_\nu && (94)\\
&= \frac{h\nu}{4\pi} I_\nu (N_1 \phi_\nu B_{12} - N_2 \psi_\nu B_{21}) && (95)\\
\chi_\nu^{\mathrm{net}} &= \frac{h\nu}{4\pi} N_1 \phi_\nu B_{12} \left(1 - \frac{N_2 g_1 \psi_\nu}{N_1 g_2 \phi_\nu}\right) && (96)
\end{aligned}$$

Interaction lumière - matière

- **Lien entre les coefficients d'Einstein et les coefficients d'extinction et d'émission**
  - Coefficient d'extinction, corrigé de l'émission induite Hypothèse de redistribution complète vérifiée, donc $\phi_\nu = \psi_\nu$ et :

$$\chi_\nu^{\mathrm{net}} = \frac{h\nu}{4\pi} N_1 \phi_\nu B_{12} \left(1 - \frac{N_2 g_1}{N_1 g_2}\right) \tag{97}$$

A l'ETL, l'équation de Boltzmann (78) s'applique et donc :

$$\chi_\nu^{\mathrm{net}*} = \frac{h\nu}{4\pi} N_1 \phi_\nu B_{12} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \tag{98}$$

Le facteur $(1 - e^{-h\nu/kT})$ représente la correction pour l'émission induite, mais seulement à l'ETL.

Interaction lumière - matière

• **Lien entre les coefficients d'Einstein et les coefficients d'extinction et d'émission** Remarque :
Dans le régime de Rayleigh-Jeans ($h\nu \ll kT$),

$$1 - e^{h\nu_{12}/kT} \approx \frac{h\nu}{kT} \ll 1 \qquad (99)$$

Donc l'émission induite annule presque l'absorption et peut significativement réduire l'opacité nette de la raie. Comme alors $\chi_\nu \propto T^{-1}$ (Eq. 98) et que $B_\nu \propto T$ (Eq 83), alors, dans le cas optiquement mince ($\tau_\nu \ll 1$, Eq. 66), $I_\nu(D) = \kappa_\nu s B_\nu$ sera indépendant de la température et seulement proportionnel à la *densité de colonne* du gaz :

$$\mathcal{N}_{\mathrm{HI}} = \int_l n_{\mathrm{HI}}\, dl \qquad (100)$$

Interaction lumière - matière

- **Fonction source**

$$S_\nu = \frac{N_2\psi_\nu A_{21}}{N_1\phi_\nu B_{12} - N_2\psi_\nu B_{21}} \quad (101)$$

$$= \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\frac{N_1 g_2 \phi}{N_2 g_1 \psi} - 1} \quad (102)$$

En cas de redistribution complète :

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\frac{N_1 g_2}{N_2 g_1} - 1} \quad (103)$$

Et à l'ETL, on retrouve comme on s'y attend la loi de Kirchhoff-Planck :

$$S_\nu^* = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \equiv B_\nu(T) \quad (104)$$

Chap. 2 : Propriétés du rayonnement de corps noir

Formule de Planck

- **Intensité du rayonnement de corps noir**

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu \quad (105)$$

$$= \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (106)$$

$$B(T) = 2hc^2 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda \quad (107)$$

car $\lambda = c/\nu$
et $I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu$
donc $I_\lambda = I_\nu c/\lambda^2$
avec $|d\nu| = (c/\lambda^2)|d\lambda|$

Formule de Planck

- **Densité d'énergie du corps noir**

$$\begin{aligned} u &= \frac{4\pi}{c} J && (108)\\ &= \frac{4\pi}{c} B(T) && (109)\\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu && (110) \end{aligned}$$

$$u = 8\pi hc \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda \qquad (111)$$

Formule de Planck

- **Flux du corps noir**

On pose $x = h\nu/kT$, donc $dx = hd\nu/kT$. Avec l'Eq. 106 :

$$
\begin{aligned}
B(T) &= \frac{2h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu && (112)\\
&= \frac{2h}{c^2}\int_0^\infty \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \frac{x^3}{e^x-1}\frac{kT}{h}dx && (113)\\
&= \frac{2h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \frac{\sigma}{\pi}T^4 && (114)
\end{aligned}
$$

Loi de Stefan ; $\sigma =$ constante de Stefan-Boltzmann.

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5.670367 \times 10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}} \quad (115)$$

Comme $\mathcal{F}_{BB} = \pi B(T)$,

$$\mathcal{F}_{BB} = \sigma T^4 \quad (116)$$

Formule de Planck

- **Energie totale du corps noir**

$$
\begin{aligned}
u(T) &= \frac{4\pi}{c} B(T) && (117)\\
&= \frac{4\sigma}{c} T^4 && (118)\\
&= \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4 && (119)
\end{aligned}
$$

Formule de Planck

- **Luminosité du corps noir**

Luminosité totale L rayonnée par un corps noir (supposé sphérique) sur l'ensemble de sa surface : on intègre le flux sortant sur toute sa surface et sur toutes les fréquences (et avec l'Eq. 15) :

$$L = \int_\Sigma dA \int_0^\infty \mathcal{F}^+ d\nu = \int_\Sigma dA \int_0^\infty \pi B_\nu d\nu \qquad (120)$$

Le rayonnement de corps noir est isotrope $\rightarrow \mathcal{F}_\nu^+$ et B_ν ne dépendent pas de l'emplacement spécifique de dA sur la surface du corps noir sphérique

Donc avec l'Eq. 114 :

$$L = 4\pi R^2 \pi \int_0^\infty B_\nu d\nu = 4\pi R^2 \pi \frac{\sigma}{\pi} T^4 \qquad (121)$$

$$= 4\pi R^2 \sigma T^4 \qquad (122)$$

Caractéristiques : comportement asymptotique

- **Rayleigh-Jeans : petites fréquences (grandes longueurs d'onde)**

Si $h\nu \ll kT$ (ou $hc \ll \lambda kT$), comme $e^x \simeq 1 + x$ si $x \ll 1$:

$$B_\nu^{RJ}(T) = \frac{2kT}{c^2}\nu^2 = \frac{2kT}{\lambda^2} \tag{123}$$

$$B_\lambda^{RJ}(T) = \frac{2ckT}{\lambda^4} \tag{124}$$

$$\tag{125}$$

et

$$u_\nu^{\mathrm{RJ}}(T) = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 \tag{126}$$

$$u_\lambda^{\mathrm{RJ}}(T) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \tag{127}$$

Indépendant de h.

Caractéristiques : comportement asymptotique

- **Wien : Grandes fréquences (petites longueurs d'onde)**

Si $h\nu \gg kT$ (ou $hc \gg \lambda kT$) :

$$B_\nu^W(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad (128)$$

$$B_\lambda^W(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT} \quad (129)$$

$$(130)$$

et

$$u_\nu^{\mathrm{W}}(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT} \quad (131)$$

$$u_\lambda^{\mathrm{W}}(T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT} \quad (132)$$

Caractéristiques

- **Maximum**

On calcule la dérivée logarithmique :

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{3}{\nu} - \frac{h}{kT}\frac{e^{h\nu/kT}}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{133}$$

$$= \frac{3}{\nu} - \frac{h}{kT}\frac{1}{1-e^{-h\nu/kT}} \tag{134}$$

qui s'annule pour la fréquence ν_m telle que :

$$e^{-x_m} = 1 - \frac{x_m}{3} \tag{135}$$

avec $x_m = h\nu_m/kT$. L'équation 135 admet une seule racine positive (outre $x_m = 0$) que l'on peut déterminer numériquement : $x_m = 2.82144$. La *loi de déplacement de Wien* donne donc la position du maximum de la fonction u_ν :

$$\nu_{m,\nu}(\mathrm{Hz}) = 2.821\frac{kT}{h} = 5.879 \times 10^{10}\ T \tag{136}$$

$$\lambda_{m,\nu}(\mathrm{m}) = 5.10 \times 10^{-3}\ T^{-1} \tag{137}$$

Caractéristiques

- **Maximum**

$$\nu_{m,\nu}(\mathrm{Hz}) = 2.821\frac{kT}{h} = 5.879 \times 10^{10}\ T \quad (138)$$

$$\lambda_{m,\nu}(\mathrm{m}) = 5.10 \times 10^{-3}\ T^{-1} \quad (139)$$

$$\text{mais} \quad \nu_{m,\lambda}(\mathrm{Hz}) = 10.3 \times 10^{10}\ T \quad (140)$$

$$\lambda_{m,\lambda}(\mathrm{m}) = 2.89777 \times 10^{-3}\ T^{-1} \quad (141)$$

donc $\lambda_{m,\lambda}$ (maximisant u_λ) $\neq \lambda_{m,\nu}$ (maximisant u_ν).
Seuls $u_\nu d\nu$ = $u_\lambda d\lambda$ possèdent un sens physique.

$$u_\lambda = u_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} \quad (142)$$

$$\frac{du_\lambda}{d\lambda} = \frac{du_\nu}{d\lambda}\frac{d\nu}{d\lambda} + u_\nu \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right) \quad (143)$$

$$= \frac{du_\nu}{d\nu}\left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^2 + u_\nu \frac{d^2\nu}{d\lambda^2} \quad (144)$$

Donc $du_\lambda/d\lambda$ et $du_\nu/d\nu$ ne s'annulent pas simultanément.

Caractéristiques

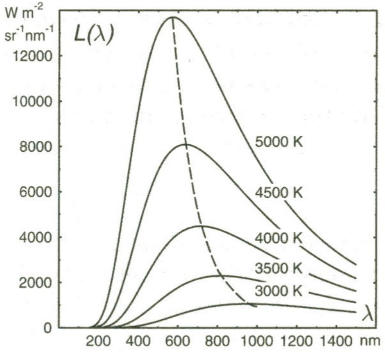


FIGURE: Distribution spectrale du rayonnement de corps noir en fonction de la longueur d'onde λ. La ligne en pointillé relie les positions des maxima de température.

Caractéristiques

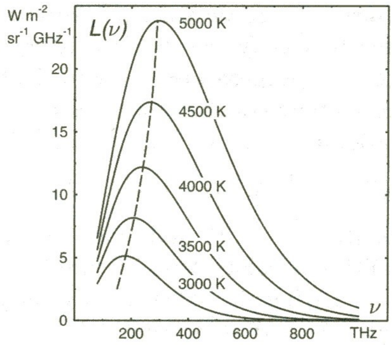


FIGURE: Distribution spectrale du rayonnement de corps noir en fonction de la fréquence ν. La ligne en pointillé relie les positions des maxima de température.

Caractéristiques

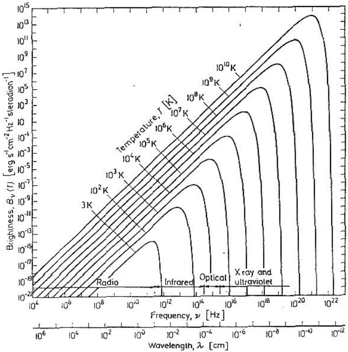


FIGURE: Distribution spectrale du rayonnement de corps noir pour différentes températures, en double échelle logarithmique. Remarquez l'absence d'intersection entre les différentes courbes.

Caractéristiques

• Etoile en formation : 1000 K (comme dans la nébuleuse d'Orion) : maximum d'émissivité u_λ à 2.9μm (IR)
• étoile centrale de nébuleuse planétaire : 100 000 K : maximum d'émissivité à 29 nm (X-UV)
• Soleil : 5800 K : maximum d'émissivité à 500 nm (milieu de la gamme visible).

Caractéristiques

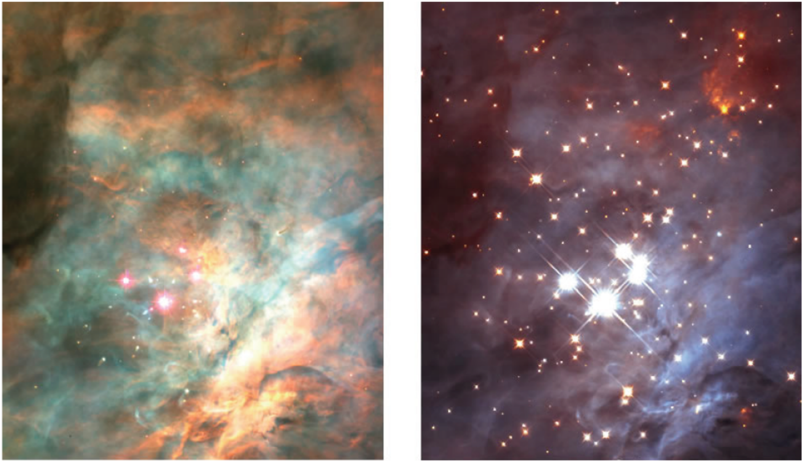


FIGURE: Région centrale de la nébuleuse d'Orion dans le visible (à gauche) et l'infra-rouge (à droite). Présence dans l'image infrarouge de nombreuses étoiles absentes de l'image visible, car trop froides (c'est-à-dire encore trop jeunes) pour émettre en visible.

Application au soleil

- **Température effective du soleil**

Loi de Stefan (Eq. 122) $\rightarrow$

$$T_{\text{eff}}^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \frac{1}{\sigma} \tag{145}$$

L est déduit de la **constante solaire** $\epsilon_\odot$ = énergie lumineuse recueillie par unité de temps et par unité de surface au sommet de l'atmosphère terrestre

$$\epsilon_\odot = 1.36 \times 10^3 J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}. \tag{146}$$

L'éclairement ou flux reçu $F = \epsilon_\odot$ à la distance D (= 1UA) de la source vaut :

$$\epsilon_\odot = \frac{L}{4\pi D^2} \tag{147}$$

Donc :

$$T_{\text{eff}}^4 = \left(\frac{D}{R}\right)^2 \frac{\epsilon_\odot}{\sigma} \tag{148}$$

Application au soleil

- **Température effective du soleil**

Le rapport R / D est directement lié au diamètre angulaire $\theta_\odot$ apparent du soleil :

$$\tan\theta_\odot = \frac{2R}{D} \approx \theta_\odot(\mathrm{rad}) \tag{149}$$

avec $\theta_\odot = 32'$.
On obtient :

$$T_{\mathrm{eff}}^4 = \frac{4}{\theta_\odot^2}\frac{\epsilon_\odot}{\sigma} = 5760K \tag{150}$$

Application au soleil

- **La constante solaire et le cycle solaire**

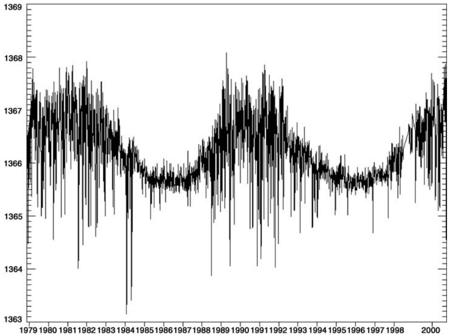


Figure 1.6. Plot of the Solar Constant (in W m^{-2}) as a function of time from satellite data. The variation follows the 11-year Sunspot cycle such that when there are more sunspots, the Sun, on average, is brighter. The peak to peak variation is less than 0.1 per cent. This plot provides definitive evidence that our Sun is a variable star. (Reproduced by permission of www.answers.com/topic/solar-variation)

FIGURE: Evolution temporelle de la constance solaire (Crédit : Astrophysics. Decoding the Cosmos, Judith A. Irwin, John Wiley & Sons, 2007)

Application au soleil

- **La constante solaire et le cycle solaire**

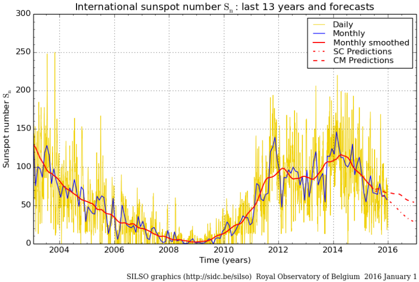


FIGURE: Evolution temporelle du nombre de taches solaires [Crédit : Royal Observatory of Belgium SILSO graphics `http://sidc.oma.be/silso/`]

Application au soleil

- **La constante solaire et le cycle solaire**

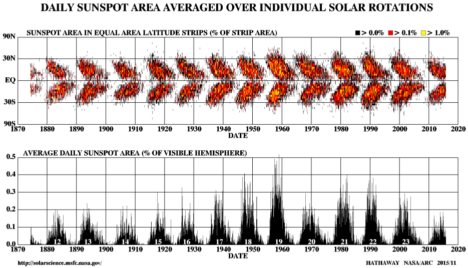


FIGURE: Diagramme "Butterfly" illustrant l'évolution temporelle de la distribution en latitude des taches solaires [Crédit : `http://solarscience.msfc.nasa.gov`]

Application au soleil

- **Température de Wien du soleil**

Spectre solaire (i.e. l'éclairement $\epsilon_{\lambda,\odot}$ en fonction de la longueur d'onde
$\rightarrow \lambda_m = 468\text{nm} = 468 \times 10^{-9}$ m.
Loi de Wien $\rightarrow T_{\text{Wien}} = 6200$ K.
$T_{\text{Wien}} \gg T_{\text{eff}}$ car le soleil n'est pas exactement un corps noir.

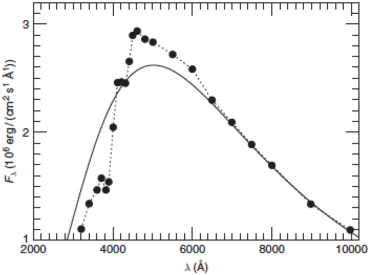


FIGURE: Flux d'un corps noir à 5770K (trait continu) comparé au flux solaire (pointillé)

Application au soleil

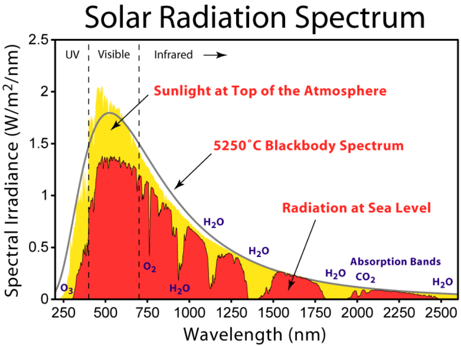


Figure 1 *Electromagnetic spectrum of sunlight above and below the atmosphere. www.Globalwarmingart.org*

FIGURE: Spectre solaire pris au sommet de l'atmosphère en fonction du nombre d'onde [Crédit : NASA]

Equilibre thermique

• **Matière en équilibre avec un gaz de photon à la température T**
$\rightarrow$ l'équation de transfert conduit à la loi de Kirchhoff :

$$\frac{j(\nu, T)}{\kappa(\nu, T)} = I(\vec{n}, \nu, T) \tag{151}$$

En réalité, l'intensité spécifique de ce rayonnement dépend uniquement de la température (et pas de la nature du milieu).

$$j^*(\nu, T) = \kappa^*(\nu, T) B_\nu(T) \tag{152}$$

A l'équilibre thermique, l'état du gaz (les populations des niveaux) est uniquement déterminée par les variables thermodynamiques (la température T et la densité totale de particules N).

Equilibre thermique

- **L'équilibre thermodynamique local**

Equilibre thermodynamique = équilibre thermique, mécanique et chimique
Une étoile n'est pas à l'E.T. (frontière ouverte, flux non nul).
MAIS un volume élémentaire de l'étoile peut être considéré à l'E.T. pour les variables d'état local : c'est l'E.T.L.
Collisions abondantes $\rightarrow$ distribution Maxwellienne des vitesses
Champ de rayonnement décrit par la fonction de Planck à la température locale.
On a donc :

$$j^*(\vec{r}, \nu, T) = \kappa^*(\vec{r}, \nu, T) B_\nu(T(\vec{r}, t)) \tag{153}$$

Chap. 3 : Corps noir et photométrie

Magnitude apparente

• **Echelle de magnitudes**

Hipparque :

- Classe 1 : les plus brillantes
- Classe 6 : les moins brillantes

$$\frac{F_2}{F_1} = 100^{\frac{1}{5}(m_1 - m_2)} \tag{154}$$

N/B. : $100^{(1/5)} \approx 2.512$

Magnitude apparente :

$$(m_1 - m_2) \stackrel{def}{=} 2.5 \log_{10} \frac{F_2}{F_1} = -2.5 \log_{10} \frac{F_1}{F_2} \tag{155}$$

Magnitude apparente

- **Echelle de magnitudes**

On choisit une valeur d'éclairement de référence ϵ_0 arbitraire (dépend de la bande spectrale).

$$m = -2.5 \log_{10} \frac{F}{\epsilon_0} \qquad (156)$$

Etalonnage de l'étoile Véga (= α Lyrae) par rapport à des sources terrestres dont le flux monochromatique est connu (soit un corps noir soit une lampe à filament de tungstène).
$\rightarrow$ Vega : $V \approx 0$
Calibrateurs secondaires
Les magnitudes des étoiles sont mesurées par comparaison avec des étoiles standards (calibreurs secondaires).

Magnitude apparente

- **Valeurs numériques :**
  - Magnitude du soleil : -26.632
  - Magnitude de la pleine lune : -12.7
  - Magnitude de Sirius (étoile lointaine la plus brillante) : -1.5
  - Magnitudes des objets les plus faibles observables dans le domaine visible par les Very Large Telescope (ESO, 8m) : environ 27
  - Magnitudes des objets les plus faibles observables dans le domaine visible par le Hubble Space Telescope : environ 31

Magnitude apparente

- **Filtres photométriques :**

Par exemple *U,B,V*, centrés en 3650Å, 4400Å, 5500Å
Notation : Les magnitudes apparentes sont souvent notées en minuscules (*m*), sauf pour les filtres photométriques classiques ($U = m_U$, idem pour *B,V,R,I,J,H,K*).

- **Magnitude bolométrique apparente**

Sur tout l'intervalle spectral

Magnitude absolue

- *Magnitude absolue* $M \overset{def}{=}$ magnitude apparente de l'objet placé à une distance de $D = 10$pc.

$$(m - M) = 2.5 \log_{10} \frac{D^2}{10^2} \tag{157}$$

$$\begin{aligned}(m - M) &= 5 \log_{10} \frac{D\ (\mathrm{pc})}{10\ (\mathrm{pc})} && (158)\\ &= 5 \log_{10} D(\mathrm{pc}) - 5 && (159)\end{aligned}$$

$m - M \overset{def}{=}$ *module de distance* (principe des *chandelles standard*).
Notation : Magnitudes absolues souvent notées en majuscules :
Magnitudes absolues M_U, M_B, M_V
$\rightarrow$ Magnitudes apparentes U,B,V.

Magnitude absolue

- **Magnitude bolométrique absolue**

$$\mathrm{M}_{\mathrm{bol},\star} - \mathrm{M}_{\mathrm{bol},\odot} = -2.5 \log_{10} \frac{\mathrm{L}_\star}{\mathrm{L}_\odot} \tag{160}$$

Soleil : luminosité bolométrique nominale $L_\star = 3.828 \times 10^{26}$ W
Magnitude bolométrique absolue $\mathrm{M}_{\mathrm{bol},\odot} = 4.74$.

Unités de distance en astronomie

- *Unité astronomique* (UA, AU en anglais) = distance Terre-Soleil (distances dans le système solaire).
  $1\text{AU} \stackrel{def}{=} 1.5 \times 10^{11}\text{m}$

Unités de distance en astronomie

- *parsec* (pc, kpc, Mpc,Gpc) = distance à une étoile de parallaxe 1" (1 seconde d'arc).
  Parallaxe = $\theta \overset{def}{=}$ angle sous lequel on verrait, depuis cette étoile, le demi-grand axe de l'orbite de la Terre (1UA).

$$\theta \overset{def}{=} \frac{1\mathrm{UA}}{d} \tag{161}$$

  Comme 1" = $\pi/(180 \times 60 \times 60)$,
  1pc$=$ 3.09 $\times$ 10^{16}m = 3.26 a.l. (années lumière).

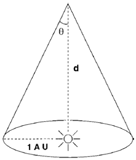


FIGURE: Définition du parsec

Unités de distance en astronomie

- pc : mesure des distances interstellaires
- kpc : mesure des tailles de galaxies
- Mpc : mesure des distances entre galaxies
- Gpc :mesure de l'Univers visible

Systèmes photométriques

- **Filtres photométriques :** Caractérisés par :
  - longueur d'onde effective

$$\lambda_0 = \frac{\int_0^\infty \lambda T(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty T(\lambda) d\lambda} \qquad (162)$$

  - transmission $T(\lambda)$
  - bande passante $\Delta\lambda$ (largeur à mi-hauteur de $T(\lambda)$)

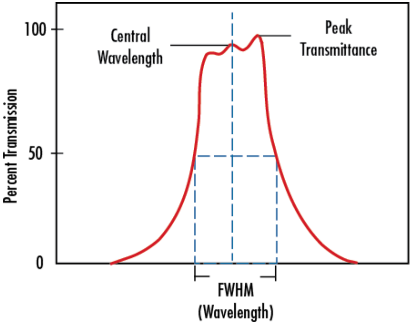


FIGURE: Transmission d'un filtre photométrique.

Systèmes photométriques

- **Filtres photométriques**

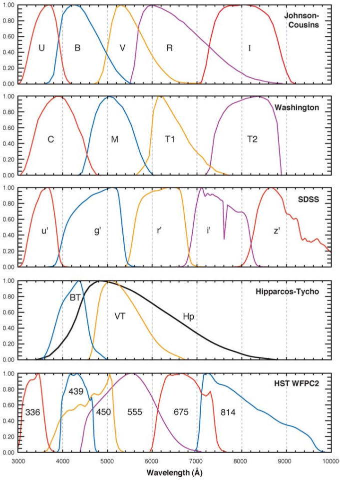


Figure 1 Schematic passbands of broad-band systems.

FIGURE: Bandes passantes de quelques systèmes à bande large.

Systèmes photométriques

- **Filtres photométriques**

Magnitude	Passband [nm]	$\varepsilon_\lambda(0)$ [10^{-9} erg cm^{-2} s^{-1} Å^{-1}]	Effective wavelength [nm]
UBVRI JHKLMN system (Johnson)			
U ultraviolet	300 - 400	4.35	360
B blue	360 - 550	7.20	440
V visual	480 - 680	3.92	550
R red	530 - 950	1.76	700
I infrared	700 - 1200	0.83	880
	Band width [nm]		
J	120	0.34	1250
H	160	0.126	1660
K	220	0.039	2220
L	350	0.0081	3450
M	460	0.0022	4650
N	1000	0.000123	10300
uvby system (Strömgren)			
u ultraviolet	30	3.25	345
v violet	19	7.18	411
b blue	18	5.81	467
y yellow	23	3.70	548

TABLE: Bandes passantes et flux zeros des principaux systèmes photométriques.

Systèmes photométriques

• **Correction bolométrique**
Coupure atmosphérique, coupure des détecteurs
$\rightarrow$ magnitudes mesurées dans des bandes passantes restreintes.

$$m_{\mathrm{bol}} \overset{def}{=} m_V - BC_V. \tag{163}$$

- Avec cette convention : $BC_V > 0$ et $m_{\mathrm{bol}} \leq m_V$
- $BC \overset{def}{=} 0$ pour les étoiles de classe spectral F5 (type solaire)
- Plus la distribution d'énergie spectrale diffère de celle du soleil, plus la correction bolométrique est élevée (>0 tant pour des étoiles plus chaudes que plus froides que le soleil).

Systèmes photométriques

- **Indices de couleur**

Indice de couleur $\stackrel{def}{=}$ différence de deux magnitudes (ex : $U - B, B - V$).
Les constantes ϵ_0 des équations 156 sont choisies telles que $U - B = 0$ et $B - V = 0$ pour des étoiles de type spectral A0.
Par exemple, pour Vega (= α Lyrae, type spectral A0V) :
$V = 0.03, B - V = U - B = 0.00$.

Systèmes photométriques

- **Indices de couleur**

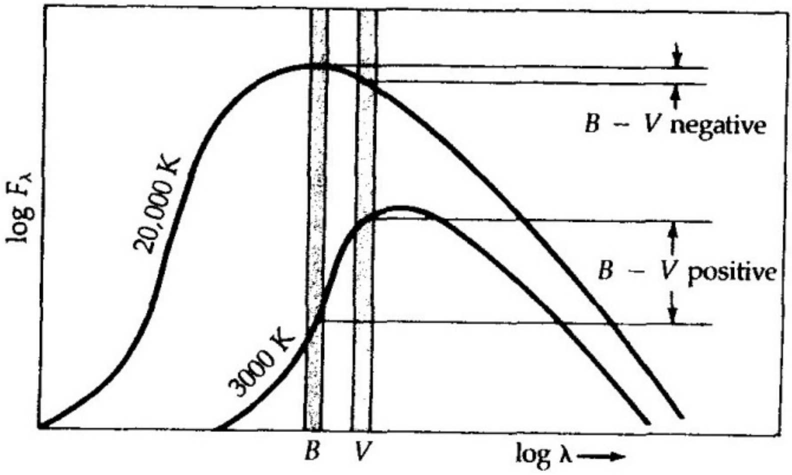


FIGURE: Indices de couleur $B - V$ pour deux corps noir de température différentes.

Systèmes photométriques

- **Température de couleur**
  - Si les étoiles étaient de parfaits corps noirs (faux !), alors, dans le régime de Wien (cf exercices) :

$$
\begin{aligned}
(B-V)_W &= -0.55 + \frac{7096}{T} && (164)\\
(U-B)_W &= -1.63 + \frac{7885}{T} && (165)
\end{aligned}
$$

  - Pour des étoiles réelles :

$$
\begin{aligned}
B-V &= -0.865 + \frac{8650}{T} \qquad \text{ou encore,} && (166)\\
T &= \frac{8650}{(B-V)+0.865} && (167)
\end{aligned}
$$

    (constantes choisies pour que $B-V=0$ pour une étoile de T=10 000K)

Température de couleur $\stackrel{def}{=}$ température d'un corps noir de mêmes indices de couleur (par exemple $U-B$ et/ou $B-V$) que l'étoile

Systèmes photométriques

• **Température cinétique**, distribution de Maxwell-Boltzmann
A l'équilibre thermique, probabilité qu'une particule de masse m et de température T ait une vitesse dans la gamme $(\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_x + d\mathrm{v}_x)$:

$$\frac{dN(\mathrm{v}_x)}{N_{\mathrm{total}}} = f(\mathrm{v}_x)d\mathrm{v}_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-m\mathrm{v}_x^2/2kT} d\mathrm{v}_x \tag{168}$$

N = nombre de particules de masse m par cm^3.
La distribution de vitesse v (en module) est :

$$\frac{dN(\mathrm{v})}{N_{\mathrm{total}}} = f(\mathrm{v})d\mathrm{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m\mathrm{v}^2/2kT} 4\pi \mathrm{v}^2 d\mathrm{v} \tag{169}$$

Systèmes photométriques

- **Température cinétique**, distribution de Maxwell-Boltzmann

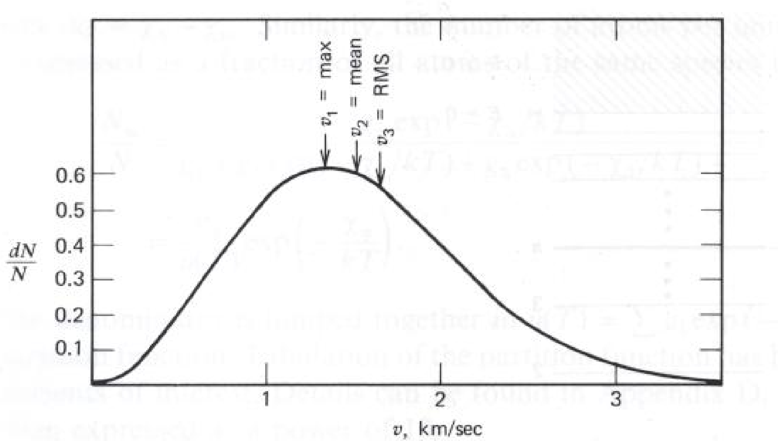


FIGURE: Distribution de Maxwell (Eq. 169) pour des atomes de fer à une température de 6000K. Les trois vitesses (plus probable = max, moyenne = mean, quadratique = RMS) sont indiquées.

Systèmes photométriques

• **Température cinétique**, distribution de Maxwell-Boltzmann
Vitesse la plus probable ($df(\mathrm{v})/d\mathrm{v} = 0$) :

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{170}$$

Vitesse moyenne ($\int_0^\infty \mathrm{v} f(\mathrm{v}) d\mathrm{v}$) :

$$\mathrm{v}_2 = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} = 1.128\ v_1 \tag{171}$$

Vitesse quadratique moyenne (RMS) ($\left(\int_0^\infty \mathrm{v}^2 f(\mathrm{v}) d\mathrm{v}\right)^{1/2}$) :

$$\mathrm{v}_3 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1.225\ v_1 \tag{172}$$

Systèmes photométriques

- **Température d'excitation**, équation de Boltzmann

A l'équilibre thermique, la population d'un niveau excité *i* par rapport à celle du fondamental 0 est :

$$\boxed{\frac{n_i}{n_0} = \frac{g_i}{g_0} e^{-\chi_i/kT_{\rm exc}}} \tag{173}$$

χ_i = énergie d'excitation par rapport au fondamental de l'atome
g_i = poids statistique du niveau *i* (niveaux dégénérés).
Nombre total d'atomes dans un état d'ionisation déterminé :

$$N = \sum_i n_i = \frac{n_0}{g_0} \sum_i g_i e^{-\chi_i/kT_{\rm exc}} = \frac{n_0}{g_0} U(T)$$

$$\text{Fonction de partition } U(T) = \sum_i g_i e^{-\chi_i/kT_{\rm exc}} \tag{174}$$

$$\text{Donc : } \frac{n_i}{N} = \frac{g_i}{U(T)} e^{-\chi_i/kT_{\rm exc}} \tag{175}$$

Systèmes photométriques

- **Température d'ionisation**, équation de Saha

Le premier indice indique l'état d'excitation, le second l'état d'ionisation

- état initial : atome dans son état fondamental. Poids statistique de l'état initial : $g_{0,\mathrm{ion1}}$
- état final : ion dans l'état fondamental $+$ électron libre dans le continu, vitesse v. Poids statistique de l'état final : $g = g_{0,\mathrm{ion2}} \times g_{\mathrm{electron}}$

L'énergie requise est $\chi_I + 1/2m\mathrm{v}^2$.
$n_{0,\mathrm{ion2}}(\mathrm{v})$ = nombre d'ions dans l'état fondamental avec un électron libre de vitesse dans la gamme $(\mathrm{v}, \mathrm{v} + d\mathrm{v})$.

$$\frac{n_{0,\mathrm{ion2}}(\mathrm{v})}{n_{0,\mathrm{ion1}}} = \frac{g_{0,\mathrm{ion2}} g_{\mathrm{electron}}}{g_{0,\mathrm{ion1}}} e^{-\frac{\chi_I + 1/2mv^2}{kT_{\mathrm{ion}}}} \tag{176}$$

$g_{\mathtt{electron}}$ = poids statistique de l'électron

Systèmes photométriques

• **Température d'ionisation**, équation de Saha

$g_{\texttt{electron}}$= nombre d'éléments de l'espace des phases disponible pour l'électron libre (deux orientations possibles du spin) :

$$g_{\mathrm{electron}} = 2(dx\ dy\ dz\ dp_x\ dp_y\ dp_z)/h^3 \qquad (177)$$

Volume élémentaire de l'espace des phases tel qu'il contient exactement un électron libre, de sorte que $dx\ dy\ dz = n_e^{-1}$.

Volume élémentaire de quantité de mouvement :

$$dp_x\ dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp = 4\pi m^3 \mathrm{v}^2 d\mathrm{v} \qquad (178)$$

L'équation 176 devient :

$$\frac{n_{0,\mathrm{ion2}}(\mathrm{v})}{n_{0,\mathrm{ion1}}} = \frac{1}{n_e} \frac{4\pi m^3}{h^3} \frac{2g_{0,\mathrm{ion2}}}{g_{0,\mathrm{ion1}}}\ e^{-\frac{\chi_I + 1/2mv^2}{kT_{\mathrm{ion}}}}\ \mathrm{v}^2 d\mathrm{v} \qquad (179)$$

Systèmes photométriques

• **Température d'ionisation**, équation de Saha
On somme sur tous les états finaux, en intégrant sur la distribution de vitesse des électrons :

$$\frac{n_{0,\mathrm{ion2}}(\mathrm{v})}{n_{0,\mathrm{ion1}}} = \frac{1}{n_e} \frac{4\pi m^3}{h^3} \frac{2g_{0,\mathrm{ion2}}}{g_{0,\mathrm{ion1}}} e^{-\frac{\chi_I}{kT_{\mathrm{ion}}}} \left(\frac{2kT_{\mathrm{ion}}}{m}\right)^{3/2} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx \tag{180}$$

L'intégrale vaut $\sqrt{\pi}/4$, donc :

$$\boxed{\frac{n_{0,\mathrm{ion2}}}{n_{0,\mathrm{ion1}}} = \frac{1}{n_e} \left(\frac{2\pi m k T_{\mathrm{ion}}}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2g_{0,\mathrm{ion2}}}{g_{0,\mathrm{ion1}}} e^{-\frac{\chi_I}{kT_{\mathrm{ion}}}}} \tag{181}$$

Forme classique de l'équation de Saha.

Systèmes photométriques

- **Température d'ionisation**, équation de Saha

Population totale de chaque ion en fonction de celle de son état fondamental : D'après l'Eq. 175 :

$$\frac{n_{i,\mathrm{ion2}}}{n_{\mathrm{ion2}}} = \frac{g_{i,\mathrm{ion2}}}{U_{\mathrm{ion2}}(T)} e^{-\chi_i/kT_{\mathrm{exc}}} \tag{182}$$

et pour le fondamental de chaque ion ($\chi_i = 0$), on retrouve l'Eq. 174 :

$$\frac{n_{0,\mathrm{ion1}}}{n_{\mathrm{ion1}}} = \frac{g_{0,\mathrm{ion1}}}{U_{\mathrm{ion1}}(T)} \quad \text{et} \quad \frac{n_{0,\mathrm{ion2}}}{n_{\mathrm{ion2}}} = \frac{g_{0,\mathrm{ion2}}}{U_{\mathrm{ion2}}(T)} \tag{183}$$

En divisant membre à membre :

$$\frac{n_{\mathrm{ion2}}}{n_{\mathrm{ion1}}} = \frac{n_{0,\mathrm{ion2}}}{n_{0,\mathrm{ion1}}} \frac{U_{\mathrm{ion2}}(T)}{U_{\mathrm{ion1}}(T)} \frac{g_{0,\mathrm{ion1}}}{g_{0,\mathrm{ion2}}} \tag{184}$$

En remplaçant dans l'Eq. 181 :

$$\boxed{\frac{n_{\mathrm{ion2}}}{n_{\mathrm{ion1}}} = \frac{1}{n_e} \left(\frac{2\pi mkT_{\mathrm{ion}}}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2U_{\mathrm{ion2}}(T)}{U_{\mathrm{ion1}}(T)} e^{-\frac{\chi_I}{kT_{\mathrm{ion}}}}} \tag{185}$$

Systèmes photométriques

• **Température d'ionisation**, équation de Saha
En terme de pression électronique, à partir de l'Eq. 181 et comme $P_e = n_e kT$:

$$\frac{n_{0,1}}{n_{0,0}} P_e = \frac{(2\pi m)^{3/2} (kT_{\rm ion})^{5/2}}{h^3} \; \frac{2 g_{0,1}}{g_{0,0}} \; e^{-\frac{\chi_I}{kT_{\rm ion}}} \tag{186}$$

que l'on ré-écrit sous forme synthétique :

$$\frac{n_{0,1}}{n_{0,0}} = \frac{\Phi(T_{\rm ion})}{P_e} \tag{187}$$

Systèmes photométriques

- **Température de brillance**

$$I_\nu \stackrel{def}{=} B_\nu(T_{\mathrm{B}\nu}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_{\mathrm{B}\nu}}} - 1} \tag{188}$$

Variation de $T_{\mathrm{B}\nu}$ avec la fréquence : mesure de l'écart entre le rayonnement d'un objet et celui d'un corps noir.
Dans le régime de Rayleigh-Jeans ($h\nu \ll kT$), relation proportionnelle avec l'intensité spécifique :

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{kT_{\mathrm{B}\nu}}{h\nu} = \frac{2\nu^2}{c^2} kT_{\mathrm{B}\nu} \tag{189}$$

Systèmes photométriques

• **Température de Wien**, loi de déplacement de Wien (Eq. 139) :

$$\lambda_{m,\lambda}(\mathrm{m}) = 2.89777 \times 10^{-3}\ T^{-1} \tag{190}$$

• **Température effective**, loi de Stefan (Eq. 122) :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \tag{191}$$

• **Ces différentes températures ne sont, en général, pas identiques ! ! !**

Systèmes photométriques

- **Discontinuité de Balmer**

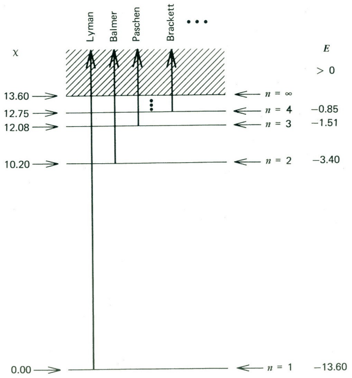


FIGURE: Niveaux d'énergie de l'hydrogène

Systèmes photométriques

- **Discontinuité de Lyman, Balmer, Paschen**

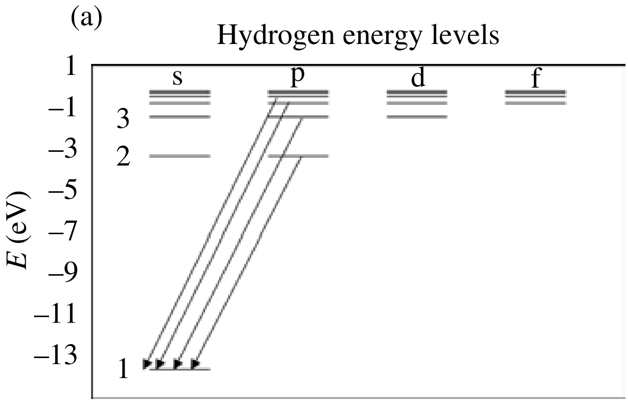


FIGURE: Diagramme simplifié représentant les niveaux d'énergie de l'hydrogène. Les transitions Lyman α à δ sont indiquées.

Systèmes photométriques

- **Discontinuité de Balmer**

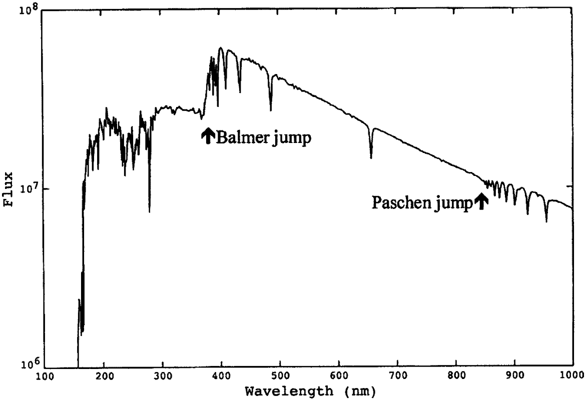


Fig. 3.11. Model spectrum of an A5-type star showing both the Balmer and Paschen discontinuities. (R.J. Sylvester, private communication.)

FIGURE:

Systèmes photométriques

- **Discontinuité de Balmer**

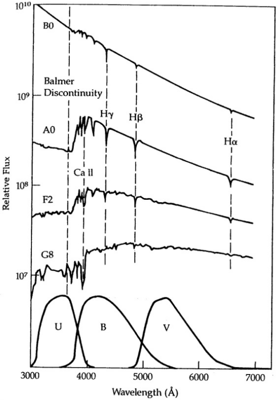


FIGURE Profiles of the spectra of various classes of main-sequence stars compared to the *UBV* bandpasses. Note that the Balmer discontinuity falls in the *U* but not the other filters. This nonlinear effect causes the sharp bend in color–color plots.

FIGURE: Exemples de spectres de la séquence principale et bandes passantes des filtres U, B, V. Dans les étoiles les plus chaudes, la majorité de l'H est ionisé.

Systèmes photométriques

- **Donc :**
  - $\lambda \leq 912$ Å :
    photoionisation à partir du niveau n = 1 : continu de Lyman
  - 912Å $\leq \lambda \leq$ 3647Å :
    photoionisation à partir du niveau n = 2 : continu de Balmer
  - 3647Å $\leq \lambda \leq$ 8206Å :
    photoionisation à partir du niveau n = 3 : continu de Paschen

Systèmes photométriques

- **Diagrammes couleur-couleur** En éliminant T dans les Eq. 164 et 165 :

$$(U - B)_W = 1.11(B - V)_W - 1.01 \qquad (192)$$

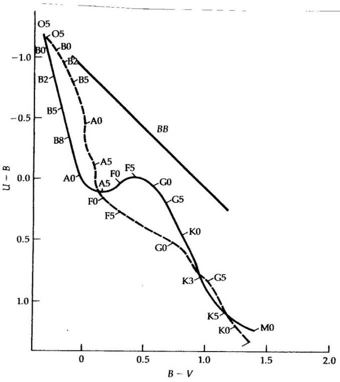


FIGURE 13–12 A color–color diagram of $U - B$ against $B - V$ for main-sequence stars (solid curve) and supergiants (dashed curve); spectral classes are indicated along each curve. The line labeled "*BB*" indicates the colors for pure blackbody radiators.

FIGURE: Diagramme couleur-couleur.

Systèmes photométriques

- **Diagrammes couleur-couleur**

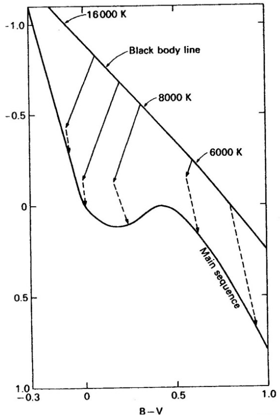


FIGURE: Diagramme couleur-couleur pour des corps noir et pour des étoiles de la séquence principale. Les flèches en trait continu illustrent (qualitativement) comment les indices de couleur des corps noirs changent à cause de la discontinuité de Balmer. Les flèches en trait pointillés illustrent comment l'absorption par les raies spectrales modifie les indices de couleur.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction**
  - Le soleil est sur le bord de notre Galaxie, mais une source d'extinction nous masque (dans le visible) des pans entiers de la Galaxie
  - Prouvé par l'observation des *amas ouverts*
  - Le milieu interstellaire est empli de gaz et de grains de poussières
  - les grains de poussière absorbent et diffusent la lumière stellaire, et rougissent la lumière des étoiles
  - La taille des grains de poussière varie entre quelques Å et quelques dixièmes de μm.
  - Les poussières sont produites en particulier par les étoiles AGB et les supernovae.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Coordonnées galactiques**
Disque galactique = plan équatorial des coordonnées galactiques (ℓ, b) (héliocentriques).
  - Latitude b : distance angulaire au plan galactique, comptée positivement vers le Nord galactique.
  - Longitude ℓ : mesurée à partir de la direction du centre galactique (physiquement désigné par la source radio Sagittarius A*), positivement vers l'Est : $\ell = 0°$, $b = 0°$.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Coordonnées galactiques**

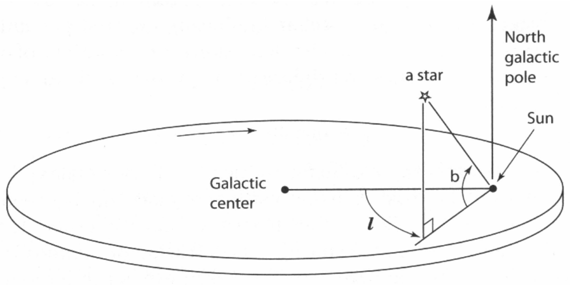


FIGURE: Coordonnées galactiques (ℓ, b) et sens de rotation de la Galaxie (flèche).

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Preuve de l'extinction (1920)**

Distribution homogène d'étoiles de densité volumique g_0.
Nombre dN d'étoiles dans un segment de cône d'ouverture $d\omega$ autour de la direction caractérisée par les coordonnées polaires galactiques (l, b) et d'épaisseur dr située à la distance r :

$$dN(r, r + dr) = g_0\ r^2\ drd\omega \tag{193}$$

Puisque d'après l'Eq. 159 :

$$\begin{aligned} M_V &= V + 5 - 5\log r & (194)\\ \log r &= 0.2(V + 5 - M_V) & (195)\\ \text{donc} \quad \mathrm{r} &= 10^{0.2(V+5-M_V)} & (196) \end{aligned}$$

Supposons que M_V soit le même pour toutes les étoiles ; on a alors :

$$dV/dr = \frac{5}{r\ln(10)} \tag{197}$$

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Preuve de l'extinction (1920)**

$$\text{Donc}\quad dN(V, V+dV) = g_0\,(10^{3\times 0.2(V+5-M_V)})\,\frac{\ln(10)}{5}\,dV d\omega \qquad (198)$$

$$\log \frac{dN(V, V+dV)}{dV d\omega} = 0.6V + \text{constante.} \qquad (199)$$

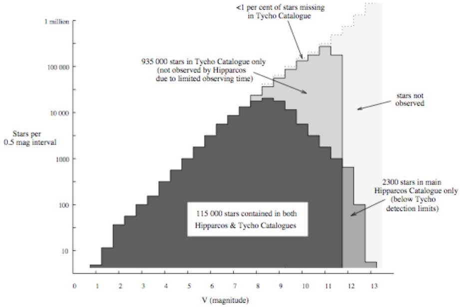


FIGURE: Nombre d'étoiles dans les catalogues Hipparcos et Tycho en fonction de la magnitude apparente.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**
  - Extinction = absorption + diffusion
  - Diffusion :
    $>$ 10nm : Mie, $\propto \lambda^{-1}$
    $<$ 10nm : Rayleigh, $\propto \lambda^{-4}$
  - Les grains
    - absorbent dans l'UV (champ de rayonnement dominé par les étoiles chaudes 10 000K)
    - émettent dans l'IR lointain (très faible température des grains)
    $\rightarrow$ Les grains causent un rougissement de la lumière des étoiles
    $\rightarrow$ Au moins deux indices de couleur (3 filtres) sont nécessaires pour déterminer la température et le rougissement interstellaire sur sa ligne de visée.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

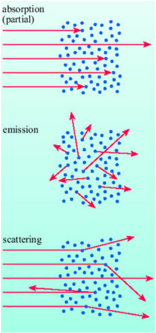


FIGURE: Absorption, diffusion et émission de rayonnement.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

FIGURE: VLT, SMC, LMC et nébuleuse du sac de charbon

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

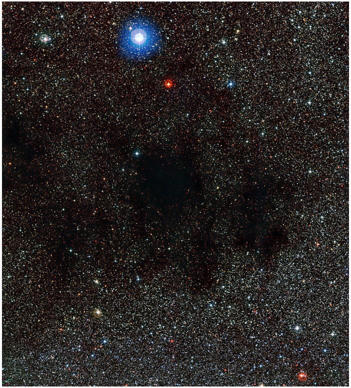


FIGURE: La nébuleuse du Sac de charbon

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

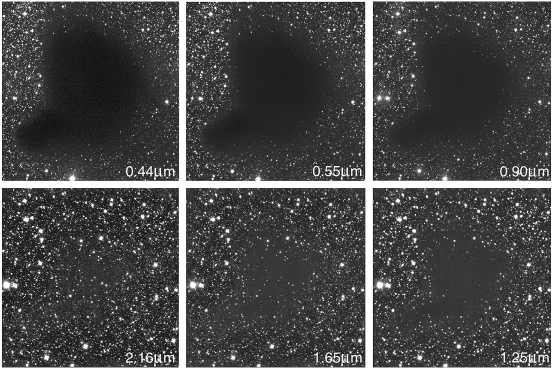


FIGURE: Nuage sombre Barnard 68 dans les 6 filtres B, V, I, J, H, K. L'extinction diminue spectaculairement aux grandes longueurs d'onde.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

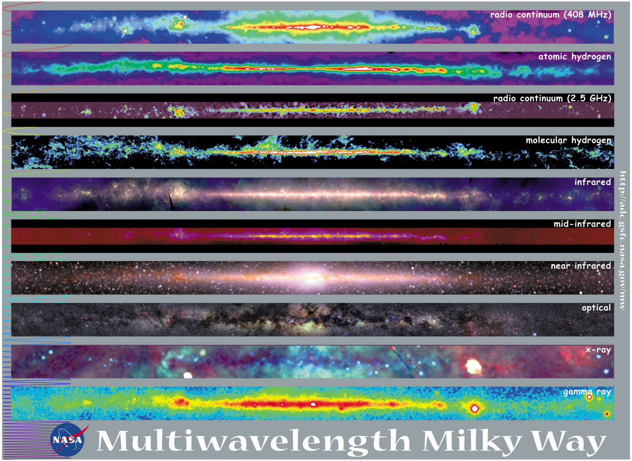


FIGURE: Notre Galaxie, dans différents domaines de longueur d'onde (Crédit : NASA).

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

Coefficient d'extinction :

$$m = M + 5\log_{10} r - 5 + A_\lambda \tag{200}$$
$$M_V = V + 5 - 5\log r - A_V(r) \tag{201}$$

avec le *coefficient d'extinction* $A_V > 0$
Ordre de grandeur pour les étoiles du plan galactique

$$A_V \approx 1.5\ d \tag{202}$$

où d est la distance (kpc).
En réalité l'extinction évolue par sauts successifs.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

Excès de couleur :

$$E_{B-V} = (B-V)_{\text{observé}} - (B-V)_{\text{intrinsèque}} = A_B - A_V \quad (203)$$

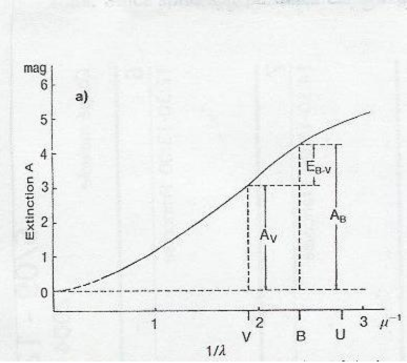


FIGURE: Excès de couleur $E_{B-V} = A_B - A_V$

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

Excès de couleur :

- Ordre de grandeur pour les étoiles du plan galactique

$$E_{B-V} \approx 0.5\, d \tag{204}$$

- $A_V/E(B-V)$ est indépendant de d et mesure l'extinction interstellaire en fonction de la longueur d'onde.

$$R_V = \frac{A_V}{E_{B-V}} = \frac{A_V}{A_B - A_V} \approx 3.1 \tag{205}$$

- $a \gg \lambda$: optique géométrique, $R_V \to \infty$, extinction indépendante de λ

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

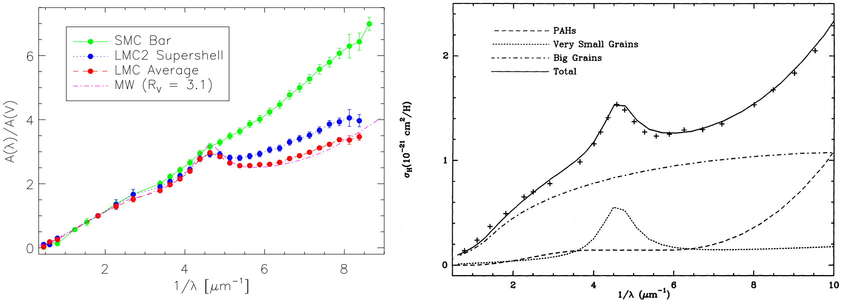


FIGURE: Gauche : Extinction moyenne par la poussière interstellaire dans la voie lactée (MW), le petit (SMC) et grand (LMC) Nuage de Magellan. Droite : Contributions des différents types de grains à l'extinction interstellaire, exprimée en termes de leur section efficace σ, par atome d'hydrogène.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**
  - la loi d'extinction varie en $\sim \lambda^{-1}$ (dépendance bien plus faible que λ^{-4} de la diffusion Rayleigh par des molécules). La pente dépend de la distribution des tailles des particules diffusantes.
  - un continu causé par des HAP (molécules d'hydrocarbures polycycliques aromatisés ; Polycyclic aromatic hydrocarbons, PAHs) de taille comprise entre 0.4 et 1.2 nm
  - la "résonance" à 2175Å $(4.5\mu\text{m}^{-1})$ attribuée à une fluorescence de résonance par des petits grains ($a = 1 - 15$ nm) de graphite astrophysique (carbone amorphe).
  - une large absorption à $\sim 10\mu$m provient de gros grains ($a = 15 - 110$ nm)) silicates et de SiC.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Les hydrocarbures polycycliques aromatisés : HAP**
  - Structures planes composées d'hexagones de carbone (structure du benzène, qui est un hydrocarbures aromatiques monocyclique) avec des atomes d'hydrogène à la périphérie (ou d'autres radicaux, OH ou CN).
  - Le nombre de HAPs susceptibles d'être rencontrés est sans limite : il n'y a pas de limite au nombre de noyaux accolés.
  - 10 à 15% du carbone interstellaire se trouverait sous forme de HAP.

FIGURE: Les HAP atmosphériques ont une origine pyrolitique anthropique (combustion incomplète de matière organique à haute température).

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Les hydrocarbures polycycliques aromatisés : HAP**

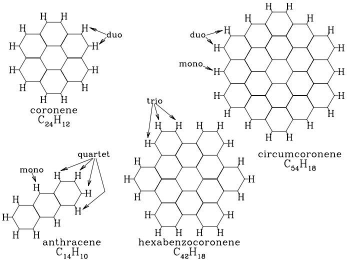


FIGURE: Les HAPs sont constituées d'atomes de carbone et d'hydrogène dont la structure comprend au moins deux cycles aromatiques condensés. Cette figure représente la structure plane stylisée de quelques PAHs benzénoides.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

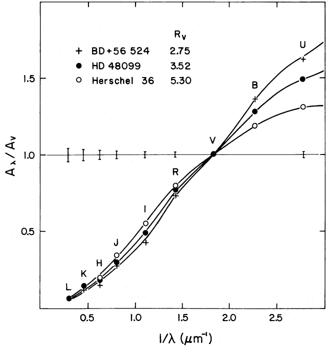


FIGURE: Courbe $A_\lambda/A_V = f(\lambda)$ pour les diverses bandes photométriques $U, B, V, R, I, J, H, K, L$

Paramétrisation (avec λ en microns) :

$$f(\lambda) = 0.72(\frac{1}{\lambda} - 1.83) + 1. \tag{206}$$

$\rightarrow$ permet de calculer le « vecteur de rougissement » d'un diagramme couleur-couleur.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

Excès de couleur :

$$E_{B-V} = A_B - A_V = A_V(\frac{A_B}{A_V} - 1) \tag{207}$$

$$E_{U-B} = A_U - A_B = A_V(\frac{A_U}{A_V} - \frac{A_B}{A_V}). \tag{208}$$

Donc :

$$\frac{E_{U-B}}{E_{B-V}} = (\frac{1}{\lambda_U} - \frac{1}{\lambda_B})/(\frac{1}{\lambda_V} - 1.83) = 1.14 \tag{209}$$

($\lambda_{\mathrm{eff,U}} = 0.36\mu$m. et $\lambda_{\mathrm{eff,B}} = 0.44\mu$m) $\rightarrow$ vecteur de rougissement

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**

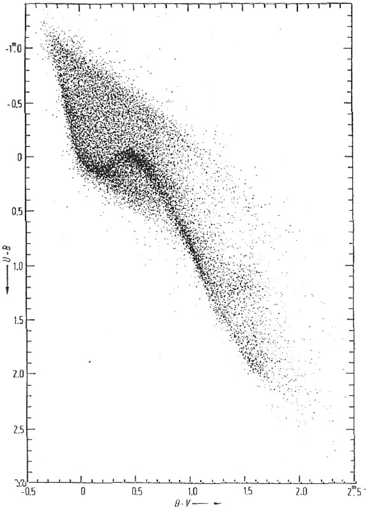


Fig. 1. *UBV* color-color diagram of 24000 stars [5].

FIGURE: Diagramme (U-B, B-V) mettant en évidence le rougissement subi par chaque étoile, la déplaçant sur une droite de pente 1.14.

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Extinction et rougissement**
  - Indices indépendants du rougissement (reddening-free) :

$$(U-B)-1.14(B-V)=(U-B)_0-1.14(B-V)_0 \quad (210)$$

  - On retrouve la valeur de R :

$$\begin{aligned} R_V &= A_V/E_{B-V}=\frac{A_V}{A_B-A_V} && (211)\\ &= [\frac{A_B}{A_V}-1]^{-1}=[0.72(\frac{1}{\lambda_B}-1.83)]^{-1} && (212)\\ &= 3.13 && (213)\end{aligned}$$

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

• **Nombre de grains sur la ligne de visée**
Extinction (en mag) :

$$\frac{A_\lambda}{\mathrm{mag}} \overset{def}{=} 2.5 \log_{10} \frac{F_{0,\lambda}}{F_\lambda} \tag{214}$$

F_λ = flux observé
$F_{0,\lambda}$ = flux qui aurait été observé si la seule atténuation provenait de la loi en l'inverse du carré de la distance.
Cette extinction doit être proportionnelle à la profondeur optique :

$$\frac{A_\lambda}{\mathrm{mag}} = 2.5 \log_{10}(e^{\tau_\lambda}) = 1.086\ \tau_\lambda \tag{215}$$

Diagrammes couleur-couleur, rougissement interstellaire et extinction

- **Nombre de grains sur la ligne de visée**

a = rayon des grains de poussière supposés sphériques
σ = Section efficace pour l'extinction (absorption + diffusion)
n = densité volumique des grains le long de la ligne de visée
N = densité de colonne des grains (grains par unité de surface) sur toute la ligne de visée.
$\kappa_\lambda = n\sigma_\lambda$ = coefficient d'absorption par unité de volume

$$\sigma_\lambda \stackrel{def}{=} Q_\lambda \pi a^2 \tag{216}$$

Profondeur optique par unité de surface sur la distance s :

$$\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_\lambda ds = \int_0^s n\sigma_\lambda ds = \sigma_\lambda \int_0^s nds = \sigma_\lambda N \tag{217}$$

Donc $A_\lambda = 1.086\ Q_\lambda \pi a^2 N$

- l'extinction A_λ est directement proportionnelle à la densité de colonne des grains sur la ligne de visée
- l'efficacité de l'extinction Q_λ et A_λ ont la même dépendance en λ : $Q_\lambda \propto A_\lambda \propto 1/\lambda$

La diffusion

La diffusion peut changer :

- la direction de propagation d'un photon
- son énergie

Différence avec absorption/ré-émission : la diffusion est rapide ; pas d'autre processus (collision avec particules) changeant l'énergie du photon.
Fonction de phase de la diffusion :

$$g = \langle \cos\theta \rangle = \frac{\int_0^\pi I(\theta) cos(\theta) d\Omega}{\int_0^\pi I(\theta) d\Omega} \tag{218}$$

g = -1, 0 ou 1 correspondent à la diffusion en arrière, isotrope, ou en avant.

La diffusion

- Thomson : avec un électron libre
- Rayleigh : $\lambda \geq a$: avec un atome ou une molécule
- Mie : avec de la poussière : $\lambda \leq a$

a est le rayon de la particule diffusante.

La diffusion élastique

Energie conservée (l'énergie du photon incident $\ll$ énergie de l'e$^-$)

• **Diffusion par des électrons libres = diffusion Thomson**

Energie de repos de l'électron libre = Domaine des photons γ :

$$E_{\rm ph} \ll m_e c^2 = 8.2 \times 10^{-7}{\rm erg} = 0.51{\rm MeV} \qquad (219)$$

$\rightarrow$ diffusion Thomson pour tous les photons jusqu'aux rayons X.
Champ EM interagissant avec un e$^-$ $\rightarrow$ $\vec{F} = e\vec{E}$ $\rightarrow$ oscillation de l'e$^-$ $\rightarrow$ rayonnement dipolaire électrique
Section efficace Thomson :

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = \frac{8\pi e^4}{3 m_e^2 c^4} \qquad (220)$$

$$= 6.65 \times 10^{-25}\ {\rm cm}^2 \qquad (221)$$

r_0 = rayon classique de l'électron = $\frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-13}\ {\rm cm}$

La diffusion élastique

- **Diffusion par des électrons libres = diffusion Thomson**
  - Section efficace est grise (indép. λ)
  - Diffusion par des protons libres :
    $\sigma_T * (m_e/m_p)^2 = \sigma_T * (1835)^{-2} \approx 10^{-7} \sigma_T * \rightarrow$ négligeable
  - rayonnement diffusé polarisé

La diffusion élastique

- **Diffusion par des e$^-$ liés : modèle classique de l'oscillateur harmonique amorti**

Fréquence propre de l'e$^-$ lié : $\nu_0 = \omega_0/2\pi$.
Constante d'amortissement classique : $\gamma_{\rm cl} = \omega_0^2\tau_e = 4\pi^2\nu_0^2\tau_e$
$\tau_e \approx r_0/c =$ temps que met la lumière pour parcourir le rayon classique de l'e$^-$

$$\tau_e \stackrel{def}{=} \frac{2e^2}{3m_ec^3} = 6.3 \times 10^{-24}\ s \tag{222}$$

$$\tag{223}$$

Donc

$$\gamma_{\rm cl} = \frac{8\pi^2e^2\nu_0^2}{3m_ec^3} \tag{224}$$

La diffusion élastique

• **Diffusion par des e$^-$ liés : modèle classique de l'oscillateur harmonique amorti**

Interaction atome - photon = interaction dipole - onde EM
L'absorption et la dispersion peuvent être expliquées, en mécanique classique, par des oscillations forcées et amorties d'oscillateurs harmoniques plongés dans un champ EM.
La section efficace de diffusion résultante est :

$$\sigma_s(\omega) \quad = \quad \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_0^3 \tau_e)^2} \qquad (225)$$

où $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation de la perturbation.
3 cas : $\omega \gg \omega_0, \quad \omega \approx \omega_0, \quad \omega \ll \omega_0$

La diffusion élastique

• **Diffusion par des e$^-$ liés : modèle classique de l'oscillateur harmonique amorti**

$\underline{\omega \gg \omega_0}$

On retrouve la diffusion Thomson (sur des électrons libres) :

$$\sigma_s(\omega) = \sigma_T \tag{226}$$

La période naturelle des oscillations ($T_0 = 1/(2\pi\omega_0)$) est beaucoup plus grande que la période des oscillations forcées par le rayonnement incident :
l'électron se comporte comme s'il était libre.

La diffusion élastique

• Diffusion par des e$^-$ liés : modèle classique de l'oscillateur harmonique amorti

$\underline{\omega \approx \omega_0}$

$(\omega^2 - \omega_0^2) = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$

$$\sigma_s(\omega) = \sigma_T \frac{\omega^4}{4\omega_0^2(\omega-\omega_0)^2 + (\omega_0^3\tau_e)^2} \quad (227)$$

$$= \sigma_T \frac{\omega_0^2}{4(\omega-\omega_0)^2 + (\omega_0^3\tau_e)^2} \quad (228)$$

$$= \sigma_T \frac{1}{2\tau_e} \frac{\omega_0^2\tau_e/2}{(\omega-\omega_0)^2 + (\omega_0^3\tau_e)^2} \quad (229)$$

$$= \sigma_T \frac{1}{2\tau_e} \frac{\gamma_{\rm cl}/2}{(\omega-\omega_0)^2 + \omega_0^2(\gamma_{\rm cl}/2)^2} \quad (230)$$

Diffusion résonante : = *fluorescence de résonance* : pic de résonance à ω_0 ($\sigma_s(\omega_0)$ maximal)

La diffusion élastique

• Diffusion par des e$^-$ liés : modèle classique de l'oscillateur harmonique amorti

$\underline{\omega \approx \omega_0}$

Exemple de diffusion résonnante :

- Raie Ly α 1220Å . Durée de vie de l'état haut : seulement 10^{-9}s $\ll$ temps moyen entre collisions $\rightarrow$ le rayonnement UV est fortement diffusé par cette raie.
- Bosse dans la courbe d'absorption à 2175Å probablement causée par une fluorescence de résonance pour le graphite.

Signal résultant polarisé (comme pour la diffusion Thomson).

La diffusion élastique

- **Diffusion par des e^- liés : modèle classique de l'oscillateur harmonique amorti**

$\underline{\omega \ll \omega_0}$

Le champ électromagnétique perturbateur est gelé par rapport aux oscillations rapides de l'électron. $\omega_0^3 \tau_e = \omega_0 \gamma_{\rm cl} \ll \omega_0^2$, donc

$$\sigma_s(\omega) = \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4 + (\omega_0 \gamma_{\rm cl})^2} \tag{231}$$

$$= \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \tag{232}$$

$$= \sigma_T \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 \tag{233}$$

$$\tag{234}$$

avec $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$. C'est la diffusion *Rayleigh*.

La diffusion élastique

• **Diffusion par des e^- liés : modèle classique de l'oscillateur harmonique amorti**

$\underline{\omega \ll \omega_0}$

Remarques sur la diffusion *Rayleigh* :

- cohérente, distribution angulaire symmétrique
- valable si $\lambda \gg a$ équivalent à $\lambda \gg \lambda_{i,j}$
  En effet a est relié à $\lambda_{i,j}$: cf modèle de l'atome de Bohr : $n\lambda = 2\pi r_n$.
- Diffusion Rayleigh si $\forall i, j, \quad \nu \ll \nu_{i,j}$. OK pour transitions UV de N_2 et O_2 atmosphériques, et lumière visible.
- Ciel bleu

La diffusion élastique

- **Diffusion par des e^- liés : résultats quantiques**

$\nu_0 \rightarrow \nu_{i,j}$, ou i et j sont les niveaux bas et hauts.
$f_{i,j}$ = *force d'oscillateur*
Les 3 cas précédents deviennent :

$$\sigma_s = \sigma_T \quad \text{si } \nu \gg \nu_{\mathrm{i,j}} \tag{235}$$

$$\sigma_s = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{i,j} \phi_{\mathcal{L}}(\nu) \quad \text{si } \nu \approx \nu_{\mathrm{i,j}} \tag{236}$$

$$\sigma_s = \sigma_T f_{i,j} \left(\frac{\nu}{\nu_{i,j}} \right)^4 \quad \text{si } \nu \ll \nu_{\mathrm{i,j}} \tag{237}$$

$$\text{où} \quad \phi_{\mathcal{L}}(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{i,j}/4\pi}{(\nu - \nu_{i,j})^2 + (\gamma_{i,j}/4\pi)^2} \tag{238}$$

$$\gamma_{i,j} = \gamma_i + \gamma_j \tag{239}$$

$$\gamma_i = \sum_{k<i} A_{i,k} \qquad \gamma_j = \sum_{k<j} A_{j,k} \tag{240}$$

$A_{i,k}$ = coefficients d'Einstein = taux de désexcitation spontanée

La diffusion inélastique

- **Diffusion Compton par des e^- libres**

Le photon incident possède au moins autant d'énergie que l'énergie de masse de l'électron libre :

$$E_{\rm ph} \geq m_e c^2 = 8.2 \times 10^{-7} {\rm erg} = 0.51 {\rm MeV} \tag{241}$$

Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$$E'_{\rm ph} = \frac{E_{\rm ph}}{1 + \frac{E_{\rm ph}}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)} \tag{242}$$

où θ est l'angle de diffusion

La diffusion inélastique

- **Diffusion Compton par des e^- libres**

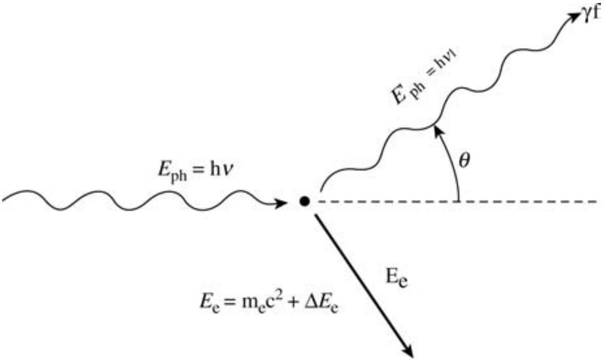


FIGURE: Schéma de la diffusion Compton avec un électron initialement au repos.

La diffusion inélastique

- **Diffusion Compton par des e$^-$ libres**
  - Photons de faibles énergies : on retrouve la diffusion Thomson cohérente.
  - Pour des photons de grande énergie ($E_{\mathrm{ph}} \gg m_e c^2$) et de grands angles de diffusion ($\cos\theta \approx 0$) :
    $\forall E_{\mathrm{ph}},\ E'_{\mathrm{ph}} \approx m_e c^2$
    $\rightarrow$ cooling du champ de rayonnement
    effets quantiques et relativistes $\rightarrow \sigma_{\mathrm{Klein-Nishina}} < \sigma_{\mathrm{Thomson}}$
  - Si transfert d'énergie de l'e$^-$ au photon : Diffusion Compton inverse

Diffusion par la poussière

- **Efficacité de diffusion**

Théorie de Mie : indice de réfraction complexe (diffusion + absorption).

Pour un grain de rayon *a*, à la longueur d'onde λ :

$Q_{(\mathrm{ext,abs,diff})\lambda} \stackrel{def}{=}$ *efficacité* (d'extinction, d'absorption ou de diffusion)

$C_{(\mathrm{ext,abs,diff})\lambda} \stackrel{def}{=}$ section efficace (d'extinction, d'absorption ou de diffusion)

$$Q_{\mathrm{ext},\lambda} = \frac{C_{\mathrm{ext},\lambda}}{\pi a^2} \tag{243}$$

$$= Q_{\mathrm{abs},\lambda} + Q_{\mathrm{diff},\lambda} \tag{244}$$

$$= \frac{C_{\mathrm{abs},\lambda}}{\pi a^2} + \frac{C_{\mathrm{diff},\lambda}}{\pi a^2} \tag{245}$$

(246)

Q_λ = rapport entre la section efficace du grain et sa section géométrique.

Diffusion par la poussière

- **Efficacité de diffusion et albedo**

albedo = fraction de lumière incidente qui est diffusée (réfléchie) :

$$A_\lambda = \frac{Q_{\mathrm{diff},\lambda}}{Q_{\mathrm{ext},\lambda}} = \frac{C_{\mathrm{diff},\lambda}}{C_{\mathrm{ext},\lambda}} \tag{247}$$

Albedo de la neige fraiche = 0.9
Albedo moyen de la Terre = 0.3
Albedo du charbon = 0.04.
Albedo d'un corps noir= 0.

Diffusion par la poussière

- **Indice de réfraction complexe**

Interaction atome - photon = interaction dipole - onde EM
Absorption et dispersion : oscillations forcées et amorties d'oscillateurs harmoniques plongés dans un champ EM.
Solution des Equations de Maxwell pour onde EM se propageant dans la direction z + dipole (atome + e$^-$) :

$$E(z) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{v_\varphi})} \tag{248}$$

$$\text{avec} \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon \mu}} \quad = \quad \text{vitesse de phase complexe} \tag{249}$$

$\epsilon =$ constante diélectrique (complexe à cause des pertes diélectriques)
$\epsilon_0 =$ permittivité du vide
$\mu =$ perméabilité magnétique (complexe à cause des pertes magnétiques)
μ_0 = perméabilité du vide
Gaz : perméabilité magnétique négligeable : $\mu = \mu_0$

Diffusion par la poussière

- **Indice de réfraction complexe**

Indice de réfraction complexe m (dépend de la composition chimique) se décompose comme :

$$m \equiv \frac{c}{v_\varphi} = n - ik \tag{250}$$

k = *indice d'atténuation* ou *coefficient d'extinction*
n = indice de réfraction (optique géométrique)

Diffusion par la poussière

• **Indice de réfraction complexe : lien entre k et κ**
L'intensité est proportionnelle à E_0^2 : Densité d'énergie
$u = \vec{E} \cdot \vec{D}/2 + \vec{H} \cdot \vec{B}/2$.
$|E_0| = |H_0|$ et $\mu = \epsilon = 1$ (vide) $\rightarrow u \propto E_0^2$.
Onde plane monochromatique se propageant dans la direction $\vec{n}$ définie par les angles θ_0 et ϕ_0 :

$$I(\mu, \phi) = I_0 \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \tag{251}$$

Densité d'énergie monochromatique $u = (4\pi/c)J$ donc $u \propto I_0/c$ Donc $I_0 \sim E_0^2$.

Diffusion par la poussière

- **Indice de réfraction complexe : lien entre k et κ**

$$\frac{z}{v_\varphi} = \frac{mz}{c} = \frac{nz}{c} - i\frac{kz}{c} \tag{252}$$

$$\text{Donc} \quad E(z) = E_0 e^{-\frac{\omega k}{c} z}\ e^{i\omega(t - \frac{nz}{c})} \tag{253}$$

1er terme (réel) : extinction
2eme terme (imaginaire) : diffusion
Attenuation du flux en traversant une couche d'épaisseur z :

$$|E(z)|^2 = E_0^2 e^{-\frac{2\omega k}{c} z} \tag{254}$$

Mais équation de transfert et épaisseur optique (en supposant nulle l'émission) :

$$I(z) = I_0 e^{-\int_0^z \chi ds} = I_0 e^{-\int_0^z \kappa ds} \tag{255}$$

$\rightarrow$ Comme $I_0 \sim E_0^2$, $\qquad \frac{2\omega k}{c} = \kappa$

Diffusion par la poussière

• **Efficacité de diffusion : variation avec** λ

A.N. Mie a résolu les éq. de Maxwelll pour la diffusion par une sphère uniforme

- de rayon *a*
- d'indice de réfraction $m(\lambda) = n(\lambda) - ik(\lambda)$

On obtient *Q* en fonction de *a* et λ (en fait de $x = 2\pi a/\lambda$).

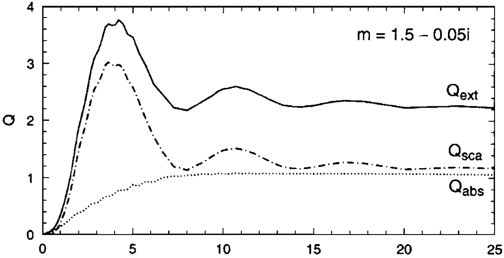


FIGURE: Efficacités d'extinction (ou absorption totale), de diffusion (scattering) et d'absorption pure (absorption) en fonction de $x = 2\pi a/\lambda$, pour un grain faiblement absorbant d'indice de réfraction *m*.

Diffusion par la poussière

- **Efficacité de diffusion : variation avec λ**
- L'interaction la plus forte quand taille du grain $\approx \lambda$ $(a/\lambda = 2/\pi)$.
- Si $x \ll 1$ ou $a \ll \lambda$: limite de diffraction. L'extinction dépend fortement de λ.

$$Q_{\mathrm{diff},\lambda} \approx \frac{8}{3}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \left|\frac{m^2-1}{m^2+1}\right|^2 \tag{256}$$

Si le grain n'est pas trop absorbant (k petit), alors le terme au carré est sensiblement constant, donc $Q_{\mathrm{diff},\lambda} \propto 1/\lambda^4$: on retrouve la diffusion Rayleigh.

$$Q_{\mathrm{abs},\lambda} \approx \left(\frac{8\pi a}{\lambda}\right) \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{m}^2-1}{\mathrm{m}^2+2}\right) \tag{257}$$

Dans ce cas, $Q_{\mathrm{abs},\lambda} \propto 1/\lambda$ (ondes radios traversant l'ISM).
En régime Rayleigh, la section efficace d'absorption ne dépend que de la masse du grain :

$$\sigma_{\mathrm{abs}} = Q_{\mathrm{abs}}\pi a^2 \propto a^3 \propto m_{\mathrm{dust}} \tag{258}$$

Diffusion par la poussière

• **Efficacité de diffusion : variation avec λ**

• Si $x \gg 1$ ou $a \gg \lambda$: L'absorption et la diffusion atteignent une valeur asymptotique.
Les sections efficaces de diffusion et d'absorption sont les sections géométriques
($Q_{\mathrm{abs}} = Q_{\mathrm{diff}} = 1$) et $Q_{\mathrm{ext}} \approx 2$. La section efficace totale est le double de la section efficace géométrique à cause de la diffraction.

Diffusion par la poussière

- **Remarque sur la diffusion**

Nébuleuses par réflection (la diffusion ré-introduit des photons dans la ligne de visée)
$\neq$ *nébuleuses en émission* (étoile centrale chaude qui ionise le gaz environnant).

FIGURE: Les Pléiades (ou Messier 45) font partie d'un amas jeune d'étoiles de type spectral O, entourées de poussière, visible sous forme d'une nébuleuse par réflection produite via la diffusion Rayleigh.

Diffusion par la poussière

- **Remarque sur la diffusion**

écho de lumière. Objet qui subit une variation brutale (supernovae, Gamma Ray Burst) ou non (certaines classes d'étoiles variables) de luminosité. La lumière traverse à la vitesse *c* des nuages de poussière.

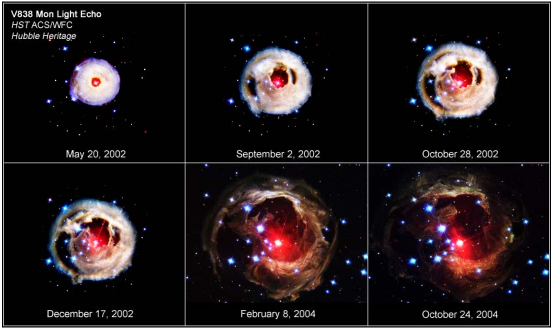


FIGURE: Séquence temporelle de 6 images de l'étoile carbonée V838 Mon, prises entre mai 2002 et octobre 2004.

Diffusion par la poussière

- **Remarque sur la diffusion**

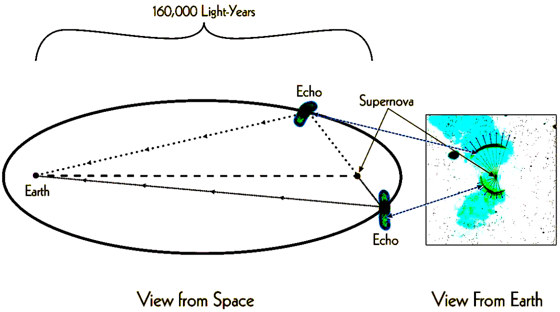


FIGURE: Shéma (vue latérale)d'un écho de lumière provenant d'une supernova. Un écho se produit lorsque la Terre est à un foyer d'une ellipse fictive, et la source à l'autre foyer, et que des nuages de poussière se trouvent le long de l'ellipse. Si la poussière est distribuée uniformément dans l'espace autour de la source, la diffusion produit un cercle, dans le cas contraire, un arc.

Chap. 4 : Introduction à l’astrophysique stellaire

Equations de base de structure stellaire

Hypothèse : symétrie sphérique

- **Equilibre hydrostatique**
- $M_r =$ la masse à l'intérieur du rayon r de l'étoile

$\rho =$ densité.

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho} \qquad (259)$$

- Coquille entre r et $r + dr$, d'aire dA, sur laquelle s'exerce la pression P au rayon r

$$PdA - (P + dP)dA - \frac{GM_r}{r^2}\rho dr dA = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}} \qquad (260)$$

3 inconnues (ρ, M_r, P)

- Etoiles normales : matière = gaz parfait, $P \propto \rho T \ \rightarrow$ pas assez d'éq.
- Naines blanches, étoiles à neutron : $P = f(\rho)$ seulement $\rightarrow$ OK

Equations de base de structure stellaire

- **Théorème du viriel pour les étoiles**

L'Eq. 260 donne :

$$\int_0^R \frac{dP}{dr}\,4\pi r^3\,dr = \int_0^R \left(-\frac{GM_r}{r^2}\rho\right)\,4\pi r^3\,dr \qquad (261)$$

Membre de gauche : $\int$ par partie, et comme P(R)=0 :

$$-\int_0^R 3P\,4\pi r^2 dr = \int_0^R \left(-\frac{GM_r}{r}\right)\,4\pi r^2\rho\,dr \qquad (262)$$

$$\text{Energie gravitationnelle :}\quad E_G = \int_0^R -G\,\frac{M_r\,(4\pi\rho r^2 dr)}{r} \qquad (263)$$

$$\text{Energie thermique :}\quad E_T = \int_0^R \frac{3}{2}nkT4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{3}{2}P4\pi r^2 dr \qquad (264)$$

$$\rightarrow\quad \text{théorème du viriel :}\quad 2E_T + E_G = 0 \qquad (265)$$

Equations de base de structure stellaire

- **Théorème du viriel pour les étoiles**

$$E_T = -\frac{1}{2} E_G = \frac{1}{2}|E_G| \tag{266}$$

$$E = E_G + E_T = \frac{1}{2} E_G = -\frac{1}{2}|E_G| \tag{267}$$

Contraction lente d'une étoile : approximativement à l'équilibre hydrostatique
$\rightarrow$ théorème du viriel valable. $|E_G| \nearrow \rightarrow |E_T| \nearrow \rightarrow Ture \nearrow$
$\frac{1}{2}\Delta E_G \rightarrow \; E_T$
$\frac{1}{2}\Delta E_G$ quitte le système (rayonnement)

Equations de base de structure stellaire

• **Temps de vie d'une étoile basé sur l'énergie gravitationnelle τ_{KH} :**
Energie gravitationnelle du Soleil (d'après 263)

$$|E_G| \approx \frac{G(M_\odot/2)}{R_\odot/2}\, M_\odot \approx 4 \times 10^{41} J \tag{268}$$

Le Soleil a déjà rayonné $1/2|E_G|$, donc son âge serait

$$\tau_{\mathrm{KH}} \approx \frac{1/2|E_G|}{L_\odot} \approx 10^7 \mathrm{ans} \tag{269}$$

= temps de Kelvin-Helmholtz $<<$ âge de la Terre (preuves géologiques).
La contraction gravitationnelle ne peut donc être la source principale d'énergie du Soleil.

Equations de base de structure stellaire

• **Transport de l'énergie dans les étoiles**

Source d'énergie nucléaire (au coeur) $\rightarrow$ transport vers l'ext.

$L_r \stackrel{def}{=}$ flux d'énergie par seconde qui traverse une surface sphérique de rayon $r < R$ centrée au coeur de l'étoile

$L(R) = L =$ luminosité totale

$\epsilon \stackrel{def}{=}$ taux de génération d'énergie par unité de masse et de temps

$$L_{r+dr} - L_r = dL_r = 4\pi r^2 dr\ \rho\epsilon \rightarrow \boxed{\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 dr\ \rho\epsilon} \qquad (270)$$

$\exists$ 3 modes important de transport de la chaleur : conduction, convection, rayonnement.

Equations de base de structure stellaire

• **Transport de l'énergie par rayonnement dans les étoiles**
Si transport par rayonnement, équation de transfert (Eq. 57) :

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \qquad (271)$$

$$\text{donc :} \quad \int_{-1}^{1} \frac{2\pi\mu^2}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = \int_{-1}^{1} \frac{2\pi\mu}{c} (I_\nu - S_\nu) \qquad (272)$$

Def du flux (Eq. 12) et de la pression de radiation (Eq. **??** et 34) :

$$P_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{1} \mu^2 I_\nu d\mu \quad \rightarrow \quad \frac{dP_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{\mathcal{F}_\nu}{c} \qquad (273)$$

Equations de base de structure stellaire

- **Transport de l'énergie par rayonnement dans les étoiles**

Si α_ν est le coefficient d'extinction massique :

$$\mathcal{F}_\nu = -\frac{c}{\alpha_\nu}\frac{dP_\nu}{dr} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F} = -c\int \frac{1}{\alpha_\nu}\frac{dP_\nu}{dr}d\nu \tag{274}$$

Mais on voudrait que le flux $\mathcal{F}$ satisfasse plutôt une éq. indép. de ν, de la forme :

$$\mathcal{F} = -c\frac{1}{\alpha_R}\frac{dP}{dr} \tag{275}$$

où $\alpha_R =$ moyenne en fréquence bien choisie de α_ν. On veut le même flux émergeant $\rightarrow$ on égale les Eq. 274 et 275 :

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int \frac{1}{\alpha_\nu}\frac{dP_\nu}{dr}d\nu}{\int \frac{dP_\nu}{dr}d\nu} \stackrel{def}{=} \textit{opacité moyenne de Rosseland} \tag{276}$$

Comme $P_\nu = 4\pi/(3c)B_\nu$ (Eq. 36),

$$\frac{dP_\nu}{dr} = \frac{4\pi}{3c}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{dT}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int \frac{1}{\alpha_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu} \tag{277}$$

Equations de base de structure stellaire

• **Transport de l'énergie par rayonnement dans les étoiles**
Notation : $\alpha_R = \rho\chi$ (χ = opacité de Rosseland de la matière stellaire). Donc :

$$\mathcal{F} = -\frac{c}{\rho\chi}\frac{d}{dr}\left(\frac{4\sigma}{3c}T^4\right) \tag{278}$$

Flux d'énergie L_r à travers la surface de rayon r :

$$L_r = 4\pi r^2 \mathcal{F} = -4\pi r^2 \frac{c}{\rho\chi}\frac{d}{dr}\left(\frac{4\sigma}{3c}T^4\right) \tag{279}$$

d'où

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\sigma}\frac{\chi\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2}} \tag{280}$$

Equations de base de structure stellaire

• **Transport de l'énergie par convection dans les étoiles**
Flux transporté par la convection (flux enthalpique) :

$$\mathcal{F}_{\text{conv}} = \rho \, C_p \, v \, \Delta T \tag{281}$$

C_p = la chaleur spécifique à pression constante de l'élément de volume de densité ρ, de vitesse v et caractérisé par un excès de température ΔT.

- Peut contribuer significativement au transport d'énergie ou pas, selon les étoiles
- Contribue toujours au profil des raies spectrales
- Assure l'homogénéité chimique des photosphères

Equations de base de structure stellaire

- **Poids moléculaire moyen**

X $\stackrel{def}{=}$ la fraction de masse d'hydrogène
Y $\stackrel{def}{=}$ la fraction de masse d'hélium
Z $\stackrel{def}{=}$ la fraction de masse de tous les autres éléments ("*métaux*")
Avec ces notations,

- $\rho X/m_{\mathrm{H}} =$ nombre d'atomes d'H par unité de volume
- $2\rho X/m_{\mathrm{H}} =$ nombre de particules pour de l'hydrogène totalement ionisé
- $\rho Y/4m_{\mathrm{H}} =$ nombre d'atomes d'He par unité de volume
- $3\rho Y/(4m_{\mathrm{H}}) =$ nombre de particules pour de l'hélium totalement ionisé
- $(A/2)\rho Z/(Am_{\mathrm{H}}) = \rho Z/(2m_{\mathrm{H}}) =$nombre de particules, pour un l'élément de masse A totalement ionisé

Equations de base de structure stellaire

• **Poids moléculaire moyen**

Nombre total de particules par unité de volume :

$$n = \left(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z\right) \frac{\rho}{m_{\mathrm{H}}} = \frac{\rho}{\mu m_{\mathrm{H}}} \qquad (282)$$

Avec le poids moléculaire moyen : $$\mu \overset{def}{=} \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \qquad (283)$$

Gaz parfait : $PV = nk_{\mathrm{B}}T$ si $V =$ volume unité

Pression du gaz : $$P = \frac{1}{V} \frac{m}{\mu m_{\mathrm{H}}} k_{\mathrm{B}}T = \frac{k_{\mathrm{B}}}{\mu m_{\mathrm{H}}} \rho T \qquad (284)$$

Equations de base de structure stellaire

- **Transport de l'énergie par convection dans les étoiles**

Hypothèses :

- cellule à la même pression que son environnement
- aucun échange de chaleur entre la cellule et son environnement (adiabatique).
- le poids moléculaire moyen des particules est constant

$\gamma \stackrel{def}{=} C_p/C_v =$ exposant adiabatique. Pendant l'expansion adiabatique d'un gaz idéal, on a $P \div \rho^\gamma$ ou

$$P\rho^{-\gamma} = \mathrm{cte} \quad (285)$$

$$\frac{d\ln\rho}{d\ln P} = \frac{1}{\gamma} \quad (286)$$

Condition pour avoir de la convection :

$$\frac{1}{\gamma} = \left[\frac{d\ln\rho}{d\ln P}\right]_{\mathrm{cell}} > \left[\frac{d\ln\rho}{d\ln P}\right]_{\mathrm{photo}} \quad (287)$$

Equations de base de structure stellaire

- **Transport de l'énergie par convection dans les étoiles**

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\rho}{\mu m_{\rm H}} k_{\rm B} T & (288)\\
\ln P &= \ln\rho - \ln\mu - \ln m_{\rm H} + \ln k + \ln T & (289)\\
\left[\frac{d\ln\rho}{d\ln P}\right]_{\rm photo} &= 1 + \frac{d\ln\mu}{d\ln P} - \frac{d\ln T}{d\ln P} & (290)
\end{aligned}
$$

Condition pour avoir de la convection = *critère de Schwarschild* :

$$
\left[\frac{d\ln T}{d\ln P}\right]_{\rm photo} > 1 - \frac{1}{\gamma} + \frac{d\ln\mu}{d\ln P} \qquad (291)
$$

Equations de base de structure stellaire

- **Transport de l'énergie par convection dans les étoiles**

$$\left[\frac{d\ln T}{d\ln P}\right]_{\rm photo} > 1 - \frac{1}{\gamma} + \frac{d\ln\mu}{d\ln P} \tag{292}$$

Condition satisfaite si :

- $\left[\frac{d\ln T}{d\ln P}\right]_{\rm photo}$ est important (grande opacité)
- $\left[\frac{d\ln T}{d\ln P}\right]_{\rm photo}$ est faible. Si H et He ne changent pas d'état d'ionisation, et si gaz chimiquement homogène $\rightarrow$ $d\ln\mu/d\ln P = 0$.
  - Gaz monoatomique, $\gamma = 5/3 \simeq 1.67$.
  $\rightarrow$ Critère de Schwarschild : $d\ln T/d\ln P > 0.4$.
  - Pour les gaz de molécules polyatomiques, $\gamma \rightarrow 1$ (nombre de degrés de liberté augmente) $\rightarrow$ la convection est favorisée dans les étoiles froides.
  - Rayonnement $\rightarrow$ γ diminue. On peut montrer que $\gamma = 4/3$.

Equations de base de structure stellaire

- **Transport de l'énergie par convection dans les étoiles**

On ré-écrit l'Eq. 292

$$\frac{dT}{T} > (1 - \frac{1}{\gamma})\frac{dP}{P} + \frac{d\mu}{\mu} \tag{293}$$

Si $\mu =$ constante pendant l'ascension de la cellule

$$\boxed{\frac{dT}{dr} > (1 - \frac{1}{\gamma})\ \frac{T}{P}\ \frac{dP}{dr}} \tag{294}$$

Equations de base de structure stellaire

- **Transport de l'énergie par convection dans les étoiles**

Théorie de la longueur de mélange (mixing-length theory, Böhm-Vitense 1958)

On note :

- $\Delta\rho \stackrel{def}{=}$ différence de densité entre la cellule convective et son environnement
- $l \stackrel{def}{=}$ longueur de mélange
  = distance sur laquelle une cellule peut subsister sans se diluer dans son environnement.

Conservation de l'énergie : $$\frac{1}{2}\rho v^2 \approx \frac{1}{2} g \Delta\rho l \qquad (295)$$

(1/2 de l'E_{pot} libérée devient E_{cin} de l'élément, l'autre moitié sert à vaincre la résistance de la matière environnante).

Si les pressions sont à l'équilibre et les μ sont constants, on a :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta T}{T} \qquad (296)$$

Equations de base de structure stellaire

- **Transport de l'énergie par convection dans les étoiles**

$$\text{Donc :} \quad v = \sqrt{\frac{gl\Delta T}{T}} \tag{297}$$

Et avec l'Eq. 281 :

$$\mathcal{F}_{\rm conv} = \rho C_p \left(\frac{gl}{T}\right)^{1/2} \Delta T^{3/2} \tag{298}$$

ou, en terme de gradient de température :

$$\mathcal{F}_{\rm conv} = \rho C_p \left(\frac{g}{T}\right)^{1/2} l^2 \left[\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\rm cell} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_{\rm photo}\right]^{3/2} \tag{299}$$

l est un paramètre ajustable
Le rayon de l'étoile dépend de $l \quad \rightarrow \quad l \approx 1.5 H_p$
$H_p \stackrel{def}{=} d(\ln(z))/d(\ln(P))$: échelle de hauteur de pression.

Construction de modèles d'étoiles

On fixe :

- l'équation d'état $P(\rho, T, X_i)$,
- l'opacité $\chi(\rho, T, X_i)$
- le taux de génération d'énergie nucléaire $\epsilon(\rho, T, X_i)$

NB : $P(\rho, T, X_i)$, $\chi(\rho, T, X_i)$ et $\epsilon(\rho, T, X_i)$ dépendent de la composition chimique de l'étoile.

4 équations importantes de la structure stellaire :

$$\boxed{\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho} \tag{300}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho \, \frac{GM_r}{r^2}} \tag{301}$$

$$\boxed{\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 dr \; \rho\epsilon} \tag{302}$$

Construction de modèles d'étoiles

Si flux transporté par rayonnement :

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\sigma}\,\frac{\chi\rho}{T^3}\,\frac{L_r}{4\pi r^2}} \tag{303}$$

Si flux transporté par convection :

$$\boxed{\frac{dT}{dr} > (1 - \frac{1}{\gamma})\,\frac{T}{P}\,\frac{dP}{dr}} \tag{304}$$

$\rightarrow$ quatre fonctions indépendantes de r : ρ, T, M_r, L_r.

Conditions aux limites :

- $r = 0$: $M_r = 0$ et $L_r = 0$
- $r = R$: $\rho = 0$ et $T = 2^{1/4} T_{\rm eff} = 2^{1/4} (\frac{L}{4\pi R2\sigma})^{1/4} \approx 1.189 T_{\rm eff}$

$\rightarrow$ problème soluble numériquement.

Construction de modèles d'étoiles

$R/R_\odot$	$M_r/M_\odot$	$L_r/L_\odot$	T	ρ
0.000	0.000	0.000	1.56e+7	1.48e+5
0.053	0.014	0.106	1.48e+7	1.23e+5
0.103	0.081	0.466	1.30e+7	8.40e+4
0.151	0.192	0.777	1.11e+7	5.61e+4
0.201	0.340	0.939	9.31e+6	3.51e+4
0.252	0.490	0.989	7.86e+6	2.09e+4
0.302	0.620	0.999	6.70e+6	1.20e+4
0.426	0.830	1.001	4.73e+6	2.96e+3
0.543	0.924	1.001	3.53e+6	8.42e+2
0.691	0.974	1.000	2.38e+6	2.05e+2
0.822	0.993	1.000	1.19e+6	6.42e+1
0.909	0.999	1.000	5.25e+5	1.87e+1
1.000	1.000	1.000	5.77e+3	0.00e+0

TABLE: Modèle solaire standard. La densité est en kg m^{-3}

.

Relations simples entre paramètres stellaires

- **Relation entre T, M et R**

$$\frac{dP}{dr} \approx \frac{P}{R} \approx -\rho \, \frac{GM_r}{r^2} \quad \text{donc} \quad P \propto \frac{M^2}{R^4} \tag{305}$$

L'équation d'état $P \propto \rho T$ et $\rho \propto M/R^3$, impliquent :

$$P \propto \frac{M}{R^3} T \tag{306}$$

Donc :

$$T \propto \frac{M}{R} \tag{307}$$

Relations simples entre paramètres stellaires

- **Relation masse-luminosité**

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\sigma}\,\frac{\chi\rho}{T^3}\,\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{308}$$

supposé valable dans toute l'étoile (et χ constant) :

$$\frac{T}{R} \propto \frac{M}{R^3 T^3}\,\frac{L}{R^2} \quad \text{donc} \quad L \propto \frac{(TR)^4}{M} \tag{309}$$

Mais comme $TR \propto M$ (Eq. 307), on obtient la *relation masse-luminosité* :

$$L \propto M^3 \tag{310}$$

Relations simples entre paramètres stellaires

- **Relation masse-luminosité**

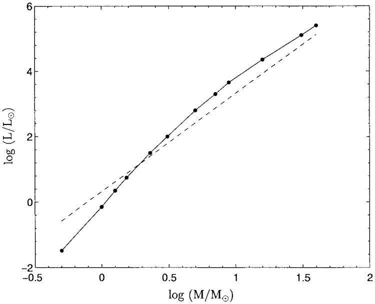


FIGURE: Relation masse-luminosité obtenue a partir de modèles d'évolution stellaire (l'exposant de l'Eq 310 possède alors la valeur 3.7), et de l'Eq. 310 (pointillés).

Relations simples entre paramètres stellaires

- **Relation masse-luminosité**

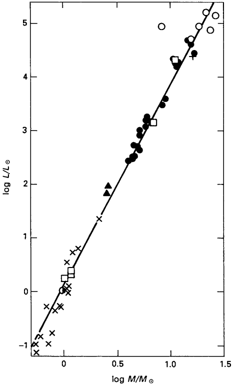


FIGURE: Relation masse-luminosité observée.

Relations simples entre paramètres stellaires

- **Relation luminosité-température== diagramme HR**

Si rayonnement de l'étoile $\approx$ rayonnement de corps noir

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eff}}^4 \tag{311}$$

Si $T_{\mathrm{eff}} \propto T_{\mathrm{centrale}}$:

$$L \propto R^2 T^4 \tag{312}$$

Mais L varie comme M^3 (Eq. 310) et RT varie comme M (Eq. 307) donc :

$$M^3 \propto M^2 T^2 \quad \text{donc} \quad M \propto T^2 \tag{313}$$

Avec l'Eq. 310 et la proportionnalité entre T et T_{eff} :

$$L \propto T_{\mathrm{eff}}^6 \tag{314}$$

Relations simples entre paramètres stellaires

- **Relation luminosité-température== diagramme HR**

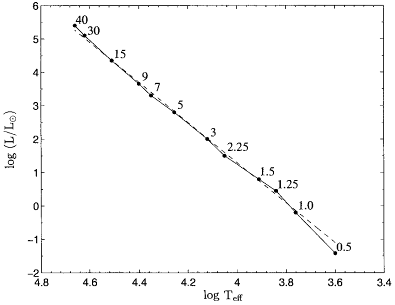


FIGURE: Diagramme HR (relation luminosité-température) obtenue a partir de modèles d'évolution stellaire (dans ce cas, $L \propto T_{\rm eff}^{5.6}$), et de l'Eq. 314 (pointillés). Les masses des modèles stellaires utilisés sont indiquées.

Relations simples entre paramètres stellaires

- **Relation luminosité-température == diagramme HR**

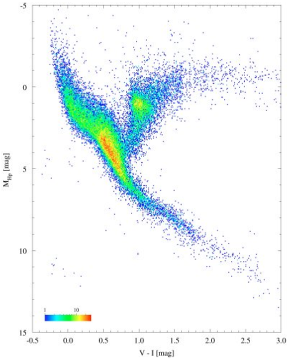


FIGURE: Diagramme HR généré à partir des mesures de 41 453 étoiles par le satellite HIPPARCOS de l'ESA. L'échelle de couleur indique le nombre d'étoiles dans des cellules de 0.01 mag en $V - I$ et 0.05 mag en M_{HP} (magnitude propre à HIPPARCOS). La densité d'étoiles dans le diagramme H-R est proportionnelle au temps caractéristique de l'évolution à ce stade.

Relations simples entre paramètres stellaires

• **Relation masse - durée de vie**
$\tau \stackrel{def}{=}$ temps pendant lequel une étoile "brûle" son combustible nucléaire.
Quantité de combustible $\propto$ masse
Taux auquel le combustible est brulé $\propto L$.
$\rightarrow$ avec la relation masse-luminosité (Eq. 310) :

$$\tau \propto \frac{M}{L} \propto \frac{1}{M^2} \tag{315}$$

Donc les étoiles plus massives épuisent plus rapidement leur combustible nucléaire, elles "vivent" moins longtemps.

Zoologie du diagramme HR

- grande L - basses $T_{\rm eff}$ (en haut à droite) :
  Etoiles rouges (grands $B - V$)
  $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm eff}^4 \quad \rightarrow \quad R \gg R_{\rm MS}$
  $\rightarrow$ étoiles *géantes rouges*
- basse L - hautes $T_{\rm eff}$ (en bas à gauche) :
  Etoiles blanches-bleues
  $L \ll L_{\rm MS} \quad \rightarrow \quad R \ll R_{\rm MS}$
  $\rightarrow$ *étoiles naines blanches*

• Séquence principale = séquence de masses stellaires
• Formation stellaire : par contraction gravitationnelle d'un nuages de gaz interstellaire.
Si M trop faible, alors températures de coeur trop faibles pour réactions nucléaires.
$\rightarrow$ *naines brunes* : 0.009-0.07 $M_\odot$(10-70 $M_{\rm Jupiter}$)
$1M_\odot \approx 104M_{\rm Jupiter}$.
NB : Masse maximale des planètes $\approx 10M_{\rm Jupiter}$.

Nucléosynthèse

- **Energie de liaison**

énergie de liaison $\stackrel{def}{=}$ énergie qu'il faut fournir pour amener les nucléons, depuis l'infini, à former un noyau de masse m_{nuc} :

$$E_B = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{nuc}}]c^2 \qquad (316)$$

Energie de liaison par nucléon $f \stackrel{def}{=} E_B/A$.

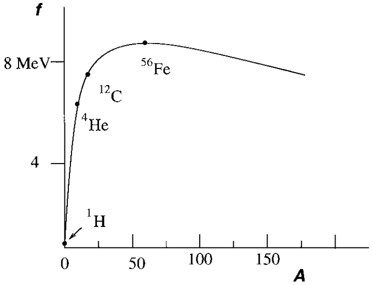


FIGURE: Schéma : énergie de liaison par nucléon.

Nucléosynthèse

- **Energie de liaison**

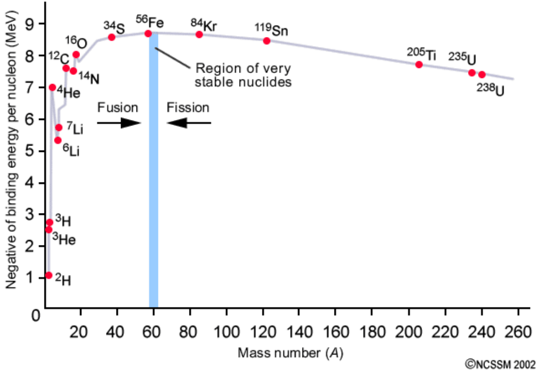


FIGURE: Energie de liaison par nucléon en fonction de la masse atomique. Les éléments du pic du fer (A$\sim$ 56) possèdent l'énergie de liaison par nucléon la plus élevée, 8.8 MeV ; par conséquent la fusion nucléaire de ces éléments en éléments plus lourds est endothermique.

Nucléosynthèse

- **Temps de vie d'une étoile basé sur l'énergie nucléaire :**

$f_{\rm He} = 6.6 \mathrm{MeV} \approx 0.007\ \mathrm{m_n}$
Conversion de $1 M_\odot$ d'H en He $\rightarrow$ libération de $0.007 M_\odot c^2$.
Donc une étoile peut convertir son hydrogène en hélium pendant :

$$\tau_{\rm nuc} \approx \frac{0.007 M_\odot c^2}{L_\odot} \approx 10^{11} \mathrm{ans} \qquad (317)$$

$\tau_{\rm nuc} \gg \tau_{\rm KH}$ (Eq. 269)
$\tau_{\rm nuc} \approx$ âge de l'Univers

Nucléosynthèse

- **Potentiel nucléaire** Potentiel colombien :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \tag{318}$$

$F_{\rm nuc} \geq F_{\rm Coulomb}$ seulement quand $d_{\rm nuc} \leq 10^{-15}$m.

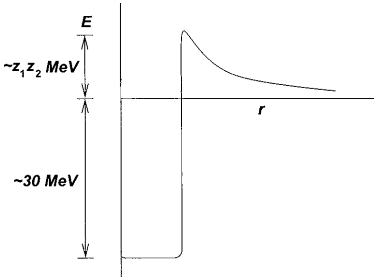


FIGURE: Schéma : potentiel nucléaire typique. Souce : Choudhuri

Nucléosynthèse

- **Taux de réaction nucléaires**

Fusion de 2 noyaux :

- $Z_1 e$ et $Z_2 e$: charge
- n_1 et n_2 : densité
- v_1 et v_2 : vitesses (distribution maxwellienne)
- $\mu \stackrel{def}{=} m_1 m_2/(m_1 + m_2)$: masse réduite
- v : vitesse relative (distribution des vitesses relatives aussi maxwellienne) :

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} 4\pi v^2 dv \qquad (319)$$

Energie cinétique : $E = 1/2mv^2$

$$f(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{(k_B T)^{3/2}} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE \qquad (320)$$

Nucléosynthèse

- **Taux de réaction nucléaires**
  - $\sigma(E) \overset{def}{=}$ section efficace de réaction entre deux noyaux s'approchant avec l'énergie cinétique E
  - $< \sigma v > \overset{def}{=}$ section efficace moyennée selon la distribution de Maxwell des énergies :

$$< \sigma v > = \int_0^\infty \sigma(E) v f(E) dE \tag{321}$$

Taux de réaction est :

$$r = n_1 n_2 < \sigma v > \tag{322}$$

Nucléosynthèse

• **Taux de réaction nucléaires**
Calcul de $\sigma(E)$:
L'énergie typique des noyaux dans les intérieurs stellaires $\ll$ hauteur de la barrière de potentiel (Fig. 54).
Probabilité de franchir cette barrière de potentiel par effet tunnel (ET) :

$$P_{\mathrm{ET}} \propto \exp\left[-\frac{1}{2\epsilon_0\hbar}\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\frac{Z_1Z_2e^2}{\sqrt{E}}\right] \tag{323}$$

En M.Q., la particule peut atteindre l'origine si :
$b_{\mathrm{imp}} \leq \hbar/(\mu v) \equiv \lambda/(2\pi)$
$\rightarrow \quad \sigma(E)_{\text{sans ET}} \propto \pi b_{\mathrm{imp}}^2 \propto \pi(\lambda/2\pi)^2 \propto \frac{1}{E}$
(Car la longueur d'onde de de Broglie $\lambda \overset{def}{=} \frac{h}{p}$ et $E = \frac{p^2}{2m}$)

Nucléosynthèse

- **Taux de réaction nucléaires**

 $\rightarrow$ section efficace incluant l'effet tunnel s'écrit :

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-\frac{b}{\sqrt{E}}} \tag{324}$$

avec :

$$b = \frac{1}{2\epsilon_0 \hbar} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} Z_1 Z_2 e^2 \tag{325}$$

$S(E)$ est déterminée expérimentalement
Unités : surface $\times$ énergie $\equiv$ barn-MeV, ou 1barn $= 10^{-24}$ cm^2
En l'absence de résonance, $S(E)$ est une fonction variant lentement avec E.

Nucléosynthèse

• Taux de réaction nucléaires

On obtient finalement

$$< \sigma v >= \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi m}} \frac{1}{(k_B T)^{3/2}} \int_0^{\infty} S(E) e^{-\frac{E}{k_B T}} e^{-\frac{b}{\sqrt{E}}} dE \qquad (326)$$

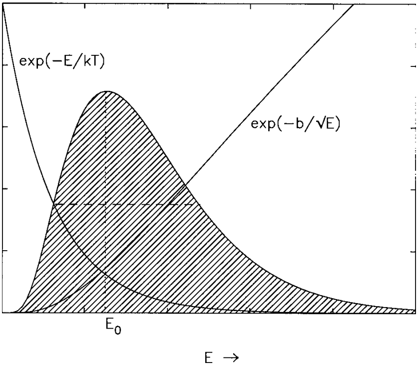


FIGURE: Schéma : Variation du facteur de Gamow, du facteur de Maxwell et de leur produit.

Nucléosynthèse

- **Taux de réaction nucléaires**

Donc $S(E) \approx S(E_0) \approx$ constante qu'on sort de l'intégrale, qui devient :

$$J = \int_0^\infty e^{g(E)} dE \quad \text{avec} \quad \mathrm{g(E)} = -\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{k_B T}} - \frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{E}}} \tag{327}$$

Maximum E_0 de la fonction $g(E)$: $dg/dE = 0$:

$$E_0 = \left(\frac{1}{2} b k_B T\right)^{2/3} \tag{328}$$

$$= \left[\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{Z_1 Z_2 e^2 k_B T}{4\epsilon_0 \hbar}\right]^{2/3} \tag{329}$$

Nucléosynthèse

• **Taux de réaction nucléaires**

On développe $g(E)$ en série autour de E_0. Comme $dg/dE = 0$ en $E = E_0$:

$$\begin{aligned} g(E) &= g(E_0) + (E - E_0)\left(\frac{dg}{dE}\right)_{E=E_0} \\ &\quad + \frac{1}{2}(E - E_0)^2\left(\frac{d^2g}{dE^2}\right)_{E=E_0} + \ldots \qquad (330) \\ &= -\tau - \frac{\tau}{4}\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)^2 + \ldots \qquad (331) \end{aligned}$$

avec :

$$\tau = -g(E_0) = 3\frac{E_0}{k_B T} = 3\left[\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{1/2}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\epsilon_0 \hbar}\right]^{2/3} \qquad (332)$$

Nucléosynthèse

- **Taux de réaction nucléaires**

En substituant dans l'Eq 327 :

$$J \approx e^{-\tau} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{4}\left(\frac{E}{E_0}-1\right)^2} dE \approx e^{-\tau} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\tau}{4}\left(\frac{E}{E_0}-1\right)^2} dE \quad (333)$$

(car l'intégrant n'est significatif qu'autour de $E = E_0$)

$\rightarrow$ Intégrale de gaussienne :

$$J \approx \frac{2}{3} k_B T \sqrt{\pi \tau} e^{-\tau} \quad (334)$$

En remplaçant dans l'Eq.326, (et comme d'après l'Eq. 332, $\tau \propto T^{-1/3}$) :

$$< \sigma v > \propto \frac{S(E_0)}{T^{2/3}} \exp\left[-3\left(\frac{e^4}{32\epsilon_0^2 k_B \hbar^2} \frac{m Z_1^2 Z_2^2}{T}\right)^{1/3}\right] \quad (335)$$

$S(E)$ est déterminé expérimentalement, donc on peut connaître le taux de réaction en substituant l'Eq. 335 dans 322.

Nucléosynthèse

- **Taux de réaction nucléaires**
  - $\mathcal{E} \stackrel{def}{=}$ énergie libérée par une réaction nucléaire
  - $\epsilon \stackrel{def}{=}$ le taux de génération d'énergie par unité de masse et de temps (cf Eq. 270)

$$\rho\epsilon = r\Delta\mathcal{E} \quad (336)$$

$$= n_1 n_2 < \sigma v > \Delta\mathcal{E} \quad (337)$$

Par définition :

$$\text{Par définition :} \quad n_j = \frac{\rho}{m_H}\frac{X_j}{A_j} \quad (338)$$

Donc $n_1 \propto \rho X_1$ et $n_2 \propto \rho X_2$. Donc :

$$\epsilon = C\rho X_1 X_2 \frac{1}{T^{2/3}} \exp\left[-3\left(\frac{e^4}{32\epsilon_0^2 k_B \hbar^2}\frac{mZ_1^2 Z_2^2}{T}\right)^{1/3}\right] \quad (339)$$

où C est estimé à partir des sections efficaces mesurées expérimentalement $S(E)$.

Nucléosynthèse

- **Taux de réaction nucléaires** Remarques :
  - Energies dans les intérieurs stellaires : $\approx$ keV
    Expériences de laboratoire : $\approx$ MeV
    $\rightarrow$ Extrapolation de $S(E)$ aux faibles énergies (dites *d'intérêt astrophysique*).
  - $\epsilon \nearrow$ avec Ture (facteur exponentiel).
  - à température égale, les réactions impliquant des noyaux plus lourds contribuent moins que celles celles impliquant des noyaux plus légers.

Nucléosynthèse

• **Réactions importantes dans les intérieurs stellaires**
La chaîne *pp* (Bethe et Critchfield 1938) :

$$^{1}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{2}\mathrm{H} + \mathrm{e}^{+} + \nu \qquad (340)$$

$$^{2}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{3}\mathrm{He} + \gamma \qquad (341)$$

Puis 3 branches : *pp*1, *pp*2 et *pp*3.
*pp*1 : dominante dans l'intérieur solaire :

$$pp1 : \quad {}^{3}\mathrm{He} + {}^{3}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{1}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \qquad (342)$$

Nucléosynthèse

- **Réactions importantes dans les intérieurs stellaires**

La chaîne *pp* (Bethe et Critchfield 1938) :

*pp*2, *pp*3 :

$$ {}^{3}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{7}\mathrm{Be} + \gamma \tag{343} $$

*pp*2 :

$$ {}^{7}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^{-} \longrightarrow {}^{7}\mathrm{Li} + \nu \tag{344} $$

$$ {}^{7}\mathrm{Li} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \tag{345} $$

*pp*3 :

$$ {}^{7}\mathrm{Be} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{8}\mathrm{Be} + \gamma \tag{346} $$

$$ {}^{8}\mathrm{Be} \longrightarrow {}^{8}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^{+} + \nu \tag{347} $$

$$ {}^{8}\mathrm{Be} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \tag{348} $$

Réaction (341) : possède la section efficace la plus faible

$\rightarrow$ à l'équilibre, détermine la génération d'énergie.

Nucléosynthèse

- **Réactions importantes dans les intérieurs stellaires**
Le cycle CNO (von Weizsäcker 1938 et Bethe 1939)

$$
\begin{aligned}
{}^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{13}\mathrm{N} + \gamma && (349)\\
{}^{13}\mathrm{N} &\longrightarrow {}^{13}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{+} + \nu && (350)\\
{}^{13}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \gamma && (351)\\
{}^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{15}\mathrm{O} + \gamma && (352)\\
{}^{15}\mathrm{O} &\longrightarrow {}^{15}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{+} + \nu && (353)\\
{}^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} && (354)
\end{aligned}
$$

De nouveau, 4 noyaux d'H forment un noyau d'He. La réaction la plus lente est 352.

Nucléosynthèse

• **Taux de génération d'énergie de la combustion de l'hydrogène**

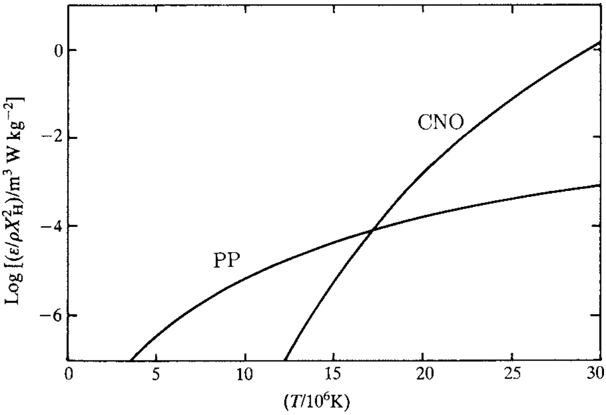


FIGURE: La variation des taux de génération d'énergie ϵ_{pp} et ϵ_{CNO} avec la température.

Nucléosynthèse

- **Structure radiative / convective du coeur**
  - Etoiles de type solaire (M $<$ 1.1 $M_{\odot}$, Tures centrales $< 20 \times 10^6$ K) : la chaîne *pp* domine
  - Etoiles plus massives (M $>$ 1.1 $M_{\odot}$) : le cycle CNO domine

    $\rightarrow$ gradient de température important au coeur

    $\rightarrow$ violation du critère de stabilité de Schwarzschild

    $\rightarrow$ coeur convectif

Nucléosynthèse

- **Structure radiative / convective des couches externes**
  - Etoiles de faible masse (0.4 - 1.1 $M_\odot$) :
    Opacité dominée par les absorptions bound-free (ionisation) ou free-free (bremsstrahlung) :

$$\kappa \propto \frac{\rho}{T^{3.5}} \tag{355}$$

(Kramers 1923 ; Approximation non valide aux faibles températures - photons pas assez énergétiques pour ionizer les atomes)

$\rightarrow$ opacité importante dans les couches externes des étoiles peu massives. Comme

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\sigma}\frac{\chi\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{356}$$

$\rightarrow$ dT/dr important

$\rightarrow$ violation du critère de stabilité de Schwarzschild

$\rightarrow$ couches externes convectives

Soleil : matière stable jusqu'à $0.7R_\odot$, convective au-delà

Nucléosynthèse

- **Structure radiative / convective des couches externes**

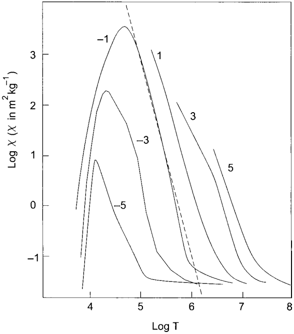


FIGURE: Opacité de matière solaire en fonction de la température. Les différentes courbes correspondent à des densités différentes, avec les valeurs de ρ (en kg m^{-3}) indiquées. La courbe pointillée représente l'opacité de Kramers (Eq. 355) pour une densité donnée.

Nucléosynthèse

- **Structure radiative / convective des couches externes**

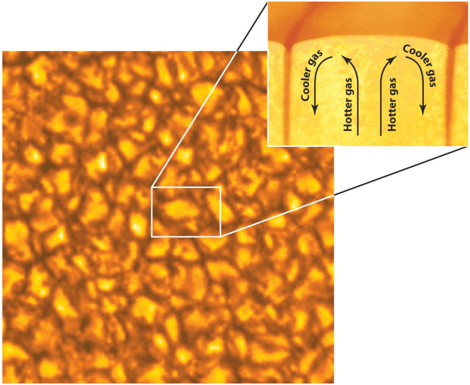


FIGURE: Granulation solaire.

Nucléosynthèse

- **Réactions importantes dans les intérieurs stellaires**

Réaction $3-\alpha$

Idée :

- 1 hydrogène et 1 hélium fusionnent pour former un noyau de masse 5
- 2 hélium fusionnent pour former un noyau de masse 8

Mais : pas de noyaux stables de masses 5 et 8 ! ! !

Réaction triple$-\alpha$ (Salpeter 1952) :

$$^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \gamma \qquad (357)$$

Plus précisément :

$$\begin{aligned} ^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} &\longrightarrow {}^{8}\mathrm{Be} && (358) \\ ^{8}\mathrm{Be} + {}^{4}\mathrm{He} &\longrightarrow {}^{12}\mathrm{C} && (359) \end{aligned}$$

- Réaction à 3 particules $\rightarrow$ beaucoup moins probable que des réactions à 2 particules.
- Répulsion colombienne plus forte que dans le cas *pp*

Nucléosynthèse

- **Réactions importantes dans les intérieurs stellaires**

Réaction $3 - \alpha$
OK dans les intérieurs stellaires si $T > 10^8$ K grâce à une résonance :
Energie $^{8}\mathrm{Be} + {}^{4}\mathrm{He} \approx$ Energie état excité du ^{12}C
Fred Hoyle :"Since we exist, then carbon must have an energy level at 7.6 MeV"

Evolution stellaire des étoiles simples

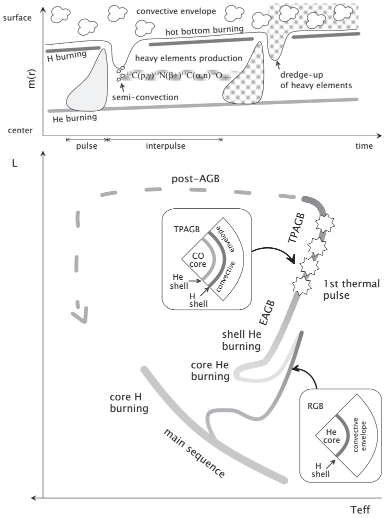


FIGURE:

Evolution stellaire des étoiles simples

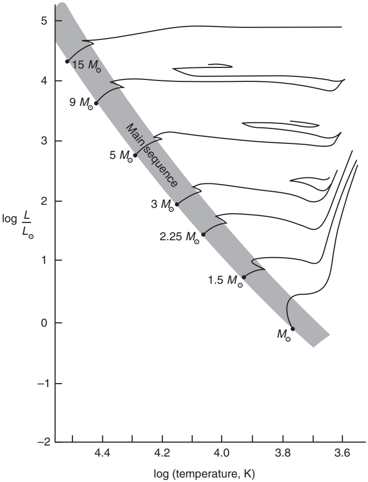


FIGURE: Tracés évolutifs théoriques dans un diagramme HR pour des étoiles de différentes masses initiales.

Evolution stellaire des étoiles simples

- $0.001M_\odot \leq M \leq 0.07M_\odot$: naines brunes
- $0.07M_\odot < M$: Séquence principale (MS) : combustion centrale de H
- $0.07M_\odot < M < 1.1M_\odot$: combustion H sur MS, cycle pp
- $1.1M_\odot < M$: combustion H sur MS, cycle CNO
- Si $M < 0.7M_\odot$: temps de vie sur la MS > âge de l'univers
- Si $M < 0.4M_\odot$: pas de combustion de He $\rightarrow$ naine blanche d'He (non observées sauf si transfert de masse)

Evolution stellaire des étoiles simples

- $0.07M_\odot < M < 8M_\odot$ **: étoiles de masse faible ou intermédiaire**
  - RGB = Red Giant Branch : combustion de H en couche
  - $0.07M_\odot < M < 1.85 - 2M_\odot$: étoiles de masse faible : coeur d'He dégénéré, flash de l'hélium
  - $1.85 - 2M_\odot < M < 8M_\odot$: étoiles de masse intermédiaire : coeur d'He non dégénéré
  - Clump ou branche horizontale : combustion centrale de He
  - AGB = Asymptotic Giant Branch : combustion de He en couche
  - TP-AGB = Thermally-pulsing AGB : combustion de He et H en double couche, pulses thermiques
  - post-AGB puis nébuleuse planétaire (planetary nebula)
  - naine blanche de CO

Evolution stellaire des étoiles simples

- $8M_\odot < M < 11M_\odot$ **: étoiles massives**
  - Cas intermédiaires complexes (super-AGB)
  - Peuvent résulter en naine blanche d'O-Ne
- $11M_\odot < M$ **: étoiles massives**
  - fusion de H, He, C, Ne, O et Si
  - Supernova
  - étoile à neutrons ou (si $M > 25 - 50M_\odot$) trou noir

Evolution stellaire des étoiles simples

- **Masse de Chandrasekhar**

$\stackrel{def}{=}$ masse maximale d'une naine blanche

$\approx 1.44 M_{\odot}$

$$M_{\mathrm{Ch}} = 2.018\,\frac{\sqrt{6}}{8\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\frac{1}{m_H^2\mu_e^2} \tag{360}$$

Nucléosynthèse des éléments plus lourds que le fer

A partir des éléments du pic du fer, capture de neutrons

- $\tau_{capturen} \gg \tau_{\beta-}$: processus *s* (slow)
- $\tau_{capturen} \ll \tau_{\beta-}$: processus *r* (rapid)

Nucléosynthèse des éléments plus lourds que le fer

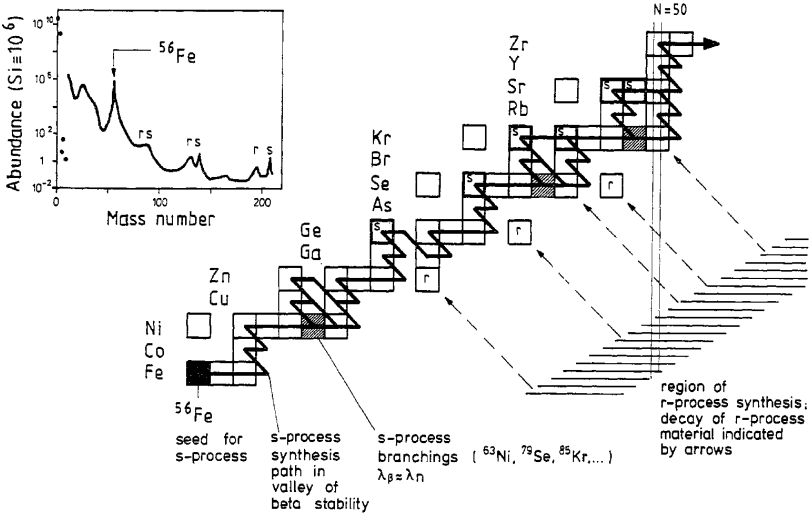


FIGURE: Portion du plan (N, Z) ; processus *s* et processus *r*

Nucléosynthèse des éléments plus lourds que le fer

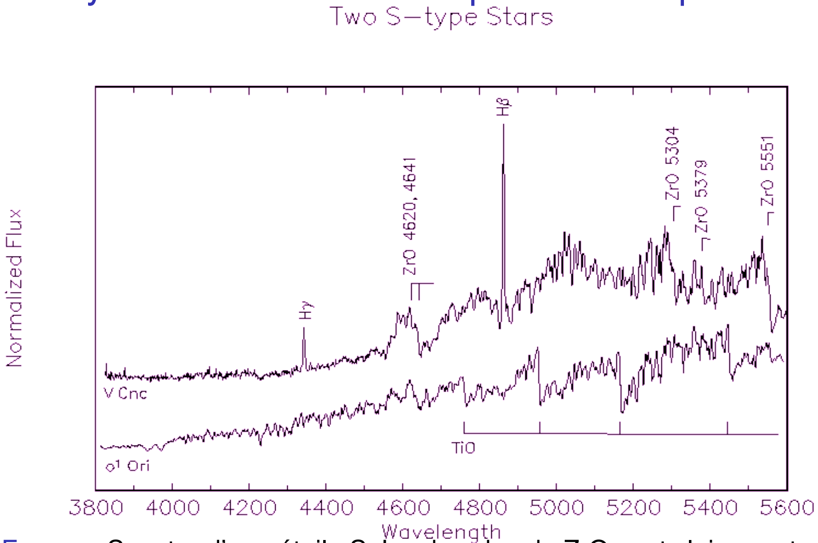


FIGURE: Spectre d'une étoile S. Les bandes de ZrO sont clairement visibles en plus des bandes de TiO.

Nucléosynthèse des éléments plus lourds que le fer

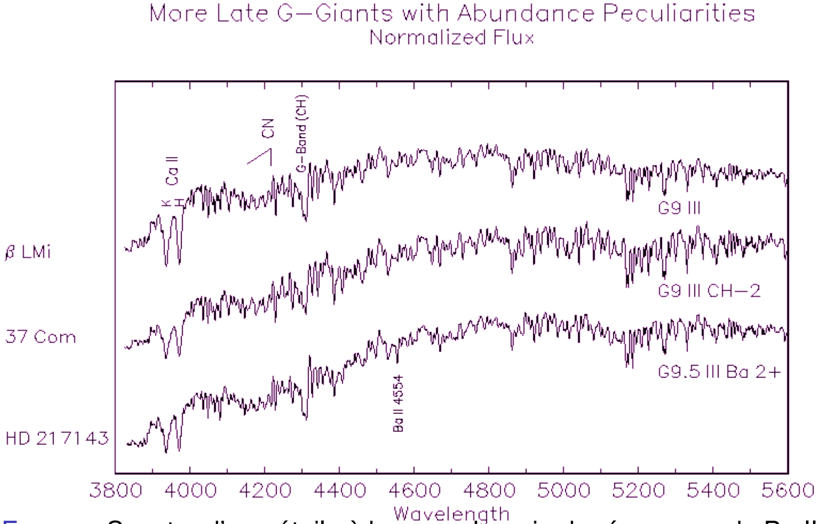


FIGURE: Spectre d'une étoile à baryum. La raie de résonance de Ba II est clairement visible ainsi que les bandes de molécules carbonées.

Nucléosynthèse des éléments plus lourds que le fer

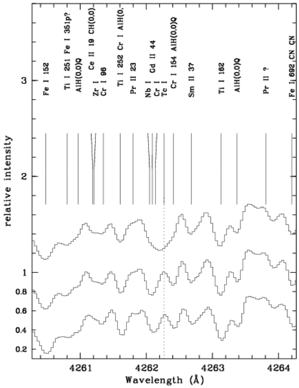


FIGURE: Spectres d'une étoile enrichie (en haut) en technetium, et de deux étoiles dépourvues de Tc (en bas).

Systèmes binaires

- **Lobe de Roche**

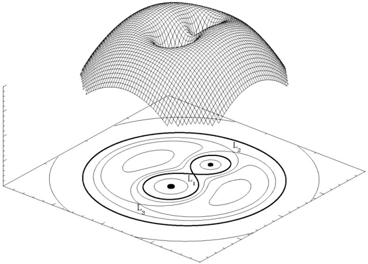


FIGURE: Potentiel gravitationnel et équipotentielles dans le référentiel en rotation. L_1, L_2 et L_3 sont les points de Lagrange, où les forces résultantes sont nulles dans le référentiel en rotation (attraction gravitationnelle due aux 2 étoiles, et force centrifuge). En général $L_1 \neq$ centre de gravité du système.

Systèmes binaires

- **Lobe de Roche**

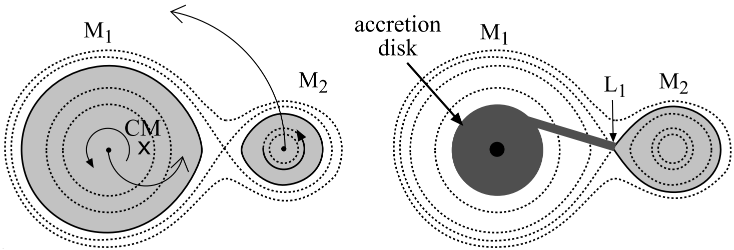


FIGURE: Surfaces équipotentielles (traits pointillés) dans le référentiel en co-rotation d'un système binaire de rapport de masse $M_1/M_2 = 5$. A gauche : les étoiles sont à l'intérieur de leur lobe de Roche (et déformées par effet de marée). A droite : l'étoile secondaire (à droite) remplit son lobe de Roche. La matière traverse L_1 et tombe sur le primaire, un objet compact. Dans un référentiel inertiel, la matière transférée possède un moment cinétique non nul. Un disque d'accrétion de forme donc autour de l'étoile primaire compacte.

Systèmes binaires

- **Evolution de systèmes binaires en interaction**
  - M_1 et M_2 : masses
  - a : séparation
  - I : moment d'inertie
  - $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}$: masse réduite

Moment cinétique d'un système binaire circulaire :

$$J = I\omega = \mu a^2 \omega \tag{361}$$

(on néglige le moment cinétique de spin)
3ème loi de Kepler :

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{a^3\omega^2}{4\pi^2} = \frac{G(M_1+M_2)}{4\pi^2} \tag{362}$$

$$\text{Donc} \qquad J = \mu\sqrt{G(M_1+M_2)a} \tag{363}$$

Systèmes binaires

- **Evolution de systèmes binaires en interaction**

Hyp : conservation du moment cinétique :

$$\frac{dJ}{dt} = \sqrt{G(M_1+M_2)}\left(\frac{d\mu}{dt}\sqrt{a}+\frac{\mu}{2\sqrt{a}}\frac{da}{dt}\right) = 0 \quad (364)$$

Donc :

$$-\frac{2}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \quad (365)$$

Hyp : conservation de la masse totale $M_1 + M_2 \rightarrow \dot{M}_1 = -\dot{M}_2$, donc :

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{M_1+M_2}\left(\dot{M}_1 M_2 + M_1 \dot{M}_2\right) = \frac{\dot{M}_1}{M_1+M_2}(M_2 - M_1)$$

Et en remplaçant dans l'Eq. 365 :

$$2\dot{M}_1 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} = \frac{\dot{a}}{a} \quad (366)$$

Systèmes binaires

- **Evolution de systèmes binaires en interaction**

$$2\dot{M}_1 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} = \frac{\dot{a}}{a} \qquad (367)$$

  - $M_1 > M_2$ et $\dot{M}_1 < 0 \quad \rightarrow \quad \dot{a} < 0$
    $\rightarrow$ les 2 étoiles se rapprochent
  - $M_1 > M_2$ et $\dot{M}_1 > 0 \quad \rightarrow \quad \dot{a} > 0$
    $\rightarrow$ les 2 étoiles s'éloignent
  - $M_1 < M_2$ et $\dot{M}_1 > 0 \quad \rightarrow \quad \dot{a} < 0$
    $\rightarrow$ les 2 étoiles se rapprochent

$\rightarrow$ vaste zoologie stellaire des systèmes binaires

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques**

$\stackrel{def}{=}$ étoile chaude qui accrète (naine blanche ou MS)
+ étoile géante froide (KM)
+ nébuleuse

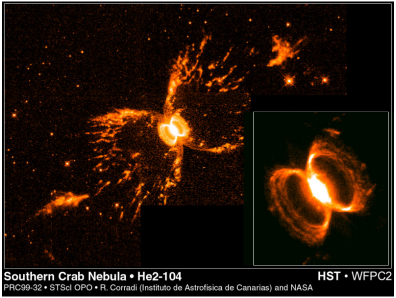


FIGURE: Etoile symbiotique He2-104, composé d'une géante rouge (une étoile variable pulsante de type Mira) et d'une naine blanche. Crédit : R. Corradi, NASA

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques**

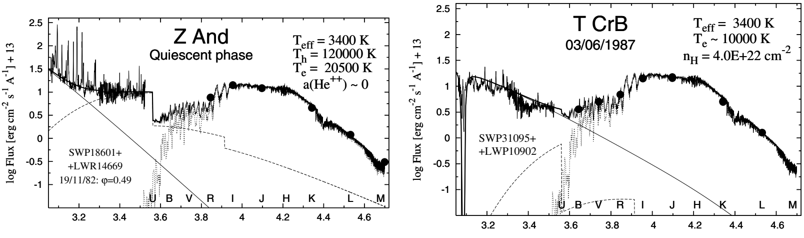


FIGURE: Distribution d'énergie spectrale observée (spectres UV et photométrie visible et IR) et modélisée d'étoiles symbiotiques. L'axe des abscisses est gradué en log(longueur d'onde/Å). Skopal, A&A 440, 995–1031, 2005.

Systèmes binaires

• **Exemple : les étoiles symbiotiques**

Comment expliquer les raies de O III (optique et UV ?)

$\rightarrow$ Fluorescence de raie (Bowen 1935) dans les étoile symbiotiques

$$\begin{aligned}
\mathrm{OIII}: 2\mathrm{p}^2(^3\mathrm{P}_2) - 2\mathrm{p3d}(^3\mathrm{P}^{\mathrm{o}}_2) \qquad & \lambda = 303.80\ \text{Å} \\
2\mathrm{p}^2(^3\mathrm{P}_2) - 2\mathrm{p3d}(^3\mathrm{P}^{\mathrm{o}}_1) \qquad & \lambda = 303.69\ \text{Å} \\
\mathrm{He\ II}: \mathrm{Ly}\alpha \qquad & \lambda = 303.78\ \text{Å}
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Raies de Bowen principales :

$$\begin{aligned}
2\mathrm{p3d}\ ^3\mathrm{P}^{\mathrm{o}} \quad & \rightarrow \quad 2p3p\ ^3P \\
& \rightarrow \quad 2p3p\ ^3S \\
& \rightarrow \quad 2p3p\ ^3D
\end{aligned}$$

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques : fluorescence de raie**

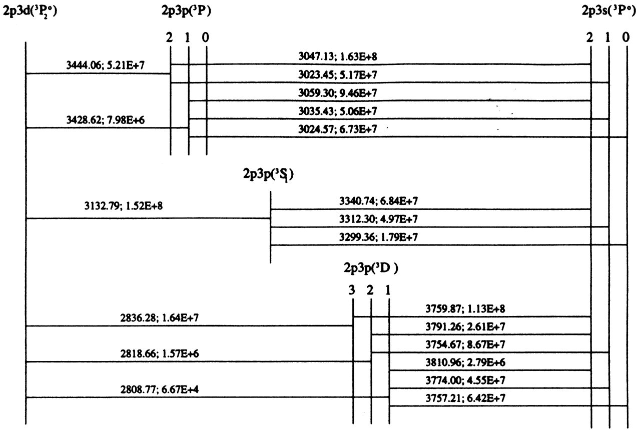


Figure 1. Bowen O1 transitions produced following the excitation of the 2p3d $^3P_2^o$ level of O^{+2}. Transition rates (s^{-1}) are from Froese Fischer (FF).

FIGURE:

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques : fluorescence de raie**

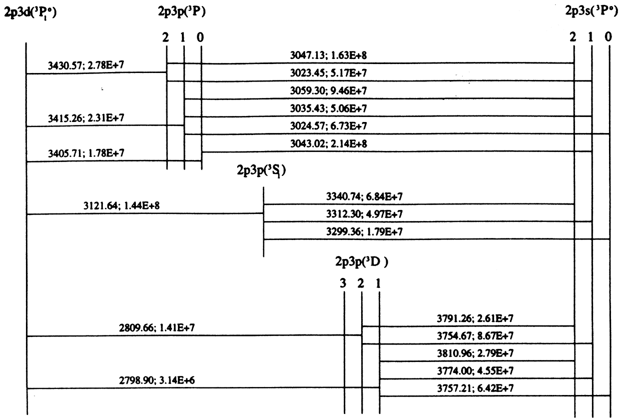


Figure 2. The same as Fig. 1, but for O3 transitions following the excitation of the 2p3d $^3P_1^o$ level.

FIGURE:

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques : fluorescence de raie**

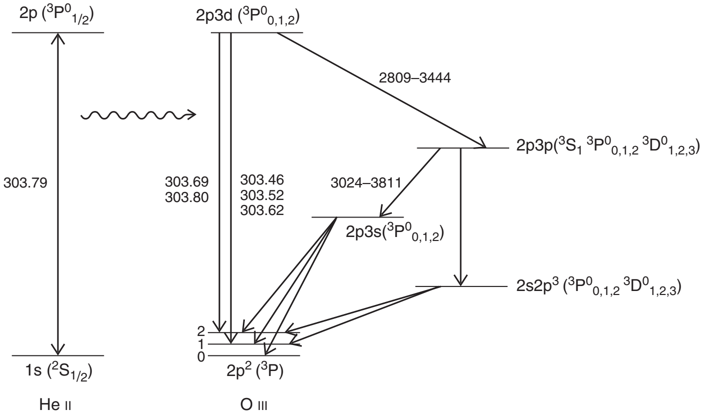


FIGURE 12.12 The Bowen fluorescence mechanism: 'resonant' excitation of O III lines by He II. Note that several transitions are grouped together because they are observationally unresolved, or for clarity.

FIGURE: Fluorescence Bowen : excitation résonnante de O III par He II.

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques : fluorescence de raie**

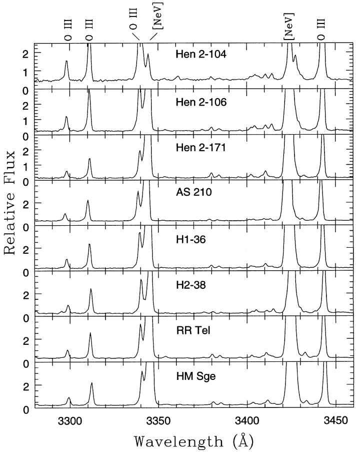


Figure 4. Bowen lines of O III in the region 3280–3460 Å. Notice the strengths of the lines at 3340 and 3428 Å, blending respectively with [Ne V]$\lambda\lambda$3343 and 3425 in Hen 2-104.

FIGURE: Spectres de raies de OIII de fluorescence Bowen dans les étoiles symbiotiques.

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques : fluorescence de raie**

FE II LEVELS PUMPED BY LINES FROM HIGHLY IONIZED ELEMENTS

Pumping line	Pumped level	λ_{ch}[a] (Å)
Si III] λ1892.030	$z^4G_{9/2}$	1892.078
	$x^4F_{5/2}$	1892.179
N IV λ1718.550	$z^4G_{5/2}$	1718.101
O III] λ1666.150	$y^4P_{5/2}$	1666.179
O III] λ1660.809	$z^2G_{9/2}$	1660.839
He II λ1640.474	$y^4G_{5/2}$	1640.152
[Ne V] λ1575.129	$x^4G_{7/2}$	1574.772
C IV λ1548.187	$y^4H_{11/2}$	1548.204
	$y^2D_{5/2}$	1548.679
	$w^2D_{3/2}$	1548.411
	$y^6F_{7/2}$	1548.028
N IV] λ1486.496	$u^4F_{3/2}$	1486.479
O IV] λ1401.157	$(^3D)4p\ ^4P_{3/2}$	1401.044
Si IV λ1393.755	$x^2H_{9/2}$	1393.814
N V λ1242.804	$v^2G_{7/2}$	1242.741
N V λ1238.821	$(^4P)4s4p\ ^4P_{5/2}$	1238.584
O V] λ1218.344	$(b^3F)4p\ ^4G_{9/2}$	1218.213
He II λ1084.942	$x^4H_{7/2}$	1085.903
	$x^4H_{9/2}$	1085.579
	$x^4H_{11/2}$	1084.992
	$u^2G_{9/2}$	1084.932
	$u^2G_{7/2}$	1084.388
O VI λ1031.912	$(a^3F)5p\ ^4D_{5/2}$	1032.041

[a]Wavelength of the Fe II channel.

TABLE: Niveau de Fe II (longueur d'onde colonne de droite) peuplés par des raies d'éléments fortement ionisés (2 premières colonnes).

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques : fluorescence de raie**

FE II LEVELS PUMPED BY H I λ1215.671

Lower lev.	Pumped lev.	λ_{ch} (Å)	obs[a]
$a^4D_{7/2}$	$(^5D)5p\ ^6F_{9/2}$	1217.848	R,A,V
$b^4P_{3/2}$	$(^4P)4sp\ ^2S_{1/2}$	1217.205	A
$a^4D_{3/2}$	$(b^3P)4p\ ^4P_{1/2}$	1217.152	R
$a^4D_{1/2}$	$(^5D)5p\ ^4D_{3/2}$	1216.523	R,A
$a^4D_{3/2}$	$(^5D)5p\ ^4P_{5/2}$	1216.239	R,A,V
$a^4D_{5/2}$	$(b^3P)4p\ ^4S_{3/2}$	1215.983	R,A,V
$a^4D_{5/2}$	$(^5D)5p\ ^4D_{5/2}$	1215.852	R,A
$a^4G_{11/2}$	$(^2F)4sp\ ^4G_{11/2}$	1215.183	R,A
$b^4F_{9/2}$	$(^2I)4sp\ ^4H_{9/2}$	1215.058	A
$a^4D_{1/2}$	$(^5D)5p\ ^4F_{3/2}$	1214.150	R
$a^4D_{3/2}$	$(^5D)5p\ ^4F_{5/2}$	1213.738	R

[a] Stars showing fluorescence lines: R=RR Tel, A=AG Peg and V=V1016 Cyg.

TABLE: Niveau de Fe II peuplés par H I λ 1215.671

.

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques : fluorescence de raie**

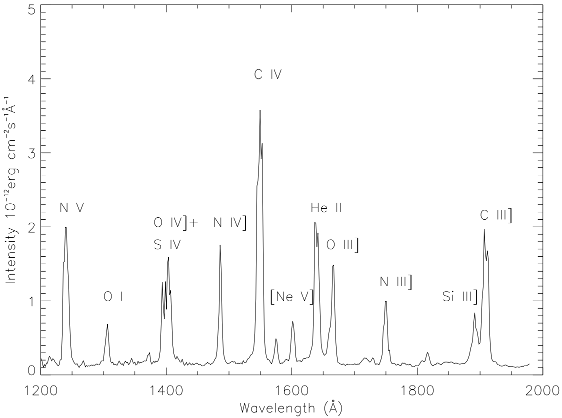


FIGURE: Spectre basse résolution IUE de l'étoile symbiotique V1016 Cyg, montrant les fortes raies en émission d'éléments fortement ionisés typiques des étoiles symbiotiques.

Systèmes binaires

- **Exemple : les étoiles symbiotiques : fluorescence de raie**

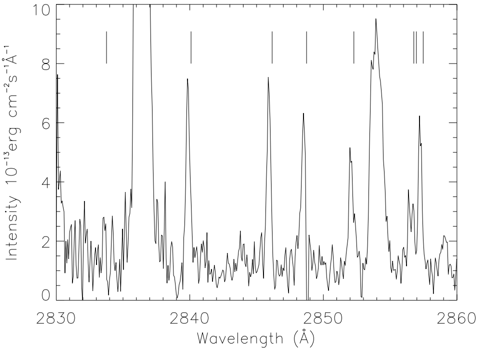


FIGURE: Spectre haute résolution IUE de l'étoile symbiotique V1016 Cyg. Toutes les raies indiquées sont des raies de fluorescence de Fe II.

Chap. 5 : Spectres stellaires et classification spectrale

Spectres stellaires et classification spectrale

- Température de surface $\rightarrow$ type spectral
- Luminosité (ou Rayon) $\rightarrow$ classe de luminosité
- Composition chimique en surface
  $\rightarrow$ étoiles normales - étoiles particulières ;
  étoiles de métallicité solaire ou étoiles déficientes en métaux

Spectres stellaires et classification spectrale

- **Types spectraux**

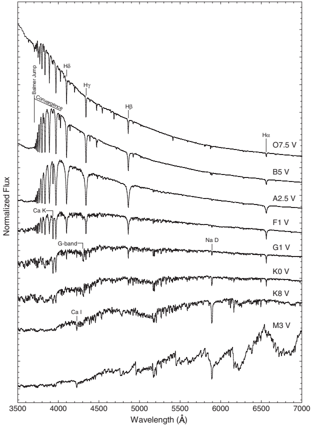


Figure 2.1 The OBAFGKM spectral sequence for main-sequence (dwarf) stars illustrating that the spectral sequence is ordered in terms of temperature. Here, the normalized stellar flux (the *energy distribution*) is plotted against wavelength. Some of the more prominent spectral features are marked, including the Balmer jump and convergence. The source of these spectra is the Indo-US coudé-feed spectral library (Valdes et al. 2004). The spectra have been normalized at a common wavelength, and separated by one continuum unit for clarity, except for the bottom spectrum, which is offset by 2 units.

FIGURE:

Spectres stellaires et classification spectrale

- **Types spectraux**

Classe	T° max (K)	T° min	couleur	raies d'absorption
O	60 000	30 000	bleue	azote, carbone, hélium et oxygène
B	30 000	10 000	bleue-blanche	hélium, hydrogène
A	10 000	7 500	blanche	hydrogène
F	7 500	6 000	jaune-blanche	métaux: fer, titane, calcium, strontium et magnésium
G	6 000	5 000	jaune(comme le soleil)	calcium, hélium, hydrogène et métaux
K	5 000	3 500	jaune-orange	métaux et oxyde de titane
M	3 500		rouge	métaux et oxyde de titane

TABLE: Principaux types spectraux

.

Soleil : G2

Spectres stellaires et classification spectrale

- **Types spectraux**

TABLE 13–1 ***The Harvard Spectral Sequence***

Spectral Type	Principal Characteristics	Spectral Criteria
O	Hottest bluish-white stars; relatively few lines; He II dominates	Strong He II lines in absorption, sometimes emission; He I lines weak but increasing in strength from O5 to O9; hydrogen Balmer lines prominent but weak relative to later types; lines of Si IV, O III, N III, and C III
B	Hot bluish-white stars; more lines; He I dominates	He I lines dominate, with maximum strength at B2; He II lines virtually absent; hydrogen lines strengthening from B0 to B9; Mg II and Si II lines
A	White stars; ionized metal lines; hydrogen Balmer lines dominate	Hydrogen lines reach maximum strength at A0; lines of ionized metals (Fe II, Si II, Mg II) at maximum strength near A5; Ca II lines strengthening; lines of neutral metals appearing weakly
F	White stars; hydrogen lines declining; neutral metal lines increasing	Hydrogen lines weakening rapidly while H and K lines of Ca II strengthen; neutral metal (Fe I and Cr I) lines gaining on ionized metal lines by late F
G	Yellowish stars; many metal lines; Ca II lines dominate	Hydrogen lines very weak; Ca II H and K lines reach maximum strength near G2; neutral metal (Fe I, Mn I, Ca I) lines strengthening while ionized metal lines diminish; molecular G band of CH becomes strong
K	Reddish stars; molecular bands appear; neutral metal lines dominate	Hydrogen lines almost gone; Ca lines strong; neutral metal lines very prominent; molecular bands of TiO begin to appear by late K
M	Coolest reddish stars; neutral metal lines strong; molecular bands dominate	Neutral metal lines very strong; molecular bands prominent, with TiO bands dominating by M5; vanadium oxide bands appear

		lines diminish; molecular G band of CH becomes strong
K	Reddish stars; molecular bands appear; neutral metal lines dominate	Hydrogen lines almost gone; Ca lines strong; neutral metal lines very prominent; molecular bands of TiO begin to appear by late K
M	Coolest reddish stars; neutral metal lines strong; molecular bands dominate	Neutral metal lines very strong; molecular bands prominent, with TiO bands dominating by M5; vanadium oxide bands appear

TABLE A4–3 ***Stellar Characteristics by Spectral Type and Luminosity Class***

Spectral Type	M_V			$B-V$			T_{eff}(K)			BC	$R/R_\odot$			$M/M_\odot$		
	V	III	Ib*	V	III	I	V	III	I	V	V	III	I	V	III	I
O5	−6.0			−0.32	−0.32	−0.32	50,000			−4.30	18			40		100
B0	−4.1	−5.0	−6.2	−0.30	−0.30	−0.24	27,000			−3.17	7.6	16	20	17		50
B5	−1.1	−2.2	−5.7	−0.16	−0.16	−0.09	16,000			−1.39	4.0	10	32	7		25
A0	+0.6	−0.6	−4.9	0.00	0.00	+0.01	10,400			−0.40	2.6	6.3	40	3.6		16
A5	+2.1	+0.3	−4.5	+0.15	+0.15	+0.07	8200			−0.15	1.8		50	2.2		13
F0	+2.6	+0.6	−4.5	+0.30	+0.30	+0.24	7200			−0.08	1.3		63	1.8		13
F5	+3.4	+0.7	−4.5	+0.45	+0.45	+0.45	6700	6500	6200	−0.04	1.2	4.0	80	1.4		10
G0	+4.4	+0.6	−4.5	+0.60	+0.65	+0.76	6000	5500	5050	−0.06	1.04	6.3	100	1.1	2.5	10
G5	+5.2	+0.3	−4.5	+0.65	+0.86	+1.06	5500	4800	4500	−0.10	0.93	10	126	0.9	3	13
K0	+5.9	+0.2	−4.5	+0.81	+1.01	+1.42	5100	4400	4100	−0.19	0.85	16	200	0.8	4	13
K5	+8.0	−0.3	−4.5	+1.18	+1.52	+1.71	4300	3700	3500	−0.71	0.74	25	400	0.7	5	16
M0	+9.2	−0.4	−4.5	+1.39	+1.65	+1.94	3700	3500	3300	−1.20	0.63		500	0.5	6	16
M5	+12.3	−0.5	−4.5	+1.69	+1.85	+2.15	3000	2700		−2.10	0.32			0.2		

*All class Ia stars have an absolute visual magnitude of −7.0.
BC is bolometric correction.

FIGURE:

Spectres stellaires et classification spectrale

- **Types spectraux**

TABLE 8–3 Excitation and Ionization Potentials for Some Atoms

Atom/Ion	Excitation Potential* (eV)	λ (nm)	Ionization Potential† (eV)	$\lambda_{\text{series limit}}$ (nm)
Hydrogen (1 e)	10.2	121.6	13.6	91.2
Helium (1 closed) shell)	20.9	58.4	24.5	48.8
Lithium (1 filled shell, 1 outer e)	1.8	670.8	5.4	225.0
Neon (2 filled shells)	16.6	73.5	21.5	57.6
Sodium (2 filled shells, 1 outer e)	2.1	589.0	5.1	243.0
Magnesium (2 filled shells, 2 outer e)	2.7	457.1	7.6	163.0
Calcium (2 filled shells, 2 filled subshells, 2 outer e)	1.9	657.3	6.1	203.0

*From ground state to first excited state.
†From ground state of neutral atom.

Spectres stellaires et classification spectrale

- **Types spectraux**

FIGURE 13–6 Absorption lines and temperature. The strengths (equivalent widths) of the absorption lines for various ionic species are shown as a function of stellar temperature. These changes result in ionization–excitation equilibria as described by the Boltzmann-Saha equation.

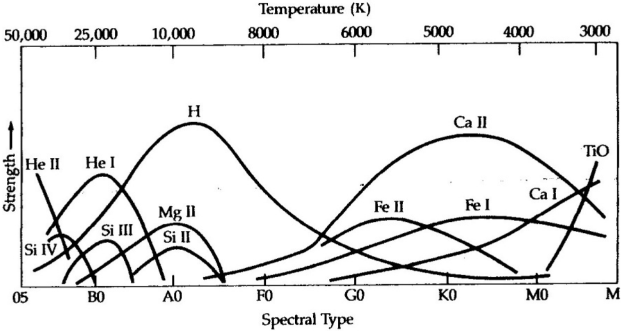


FIGURE:

.

Spectres stellaires et classification spectrale

• **Classes de luminosité**

Etoiles naines : densité H et e^- importantes $\rightarrow$ collisions $\rightarrow$ élargissement des raies

Spectres stellaires et classification spectrale

- **Classes de luminosité**

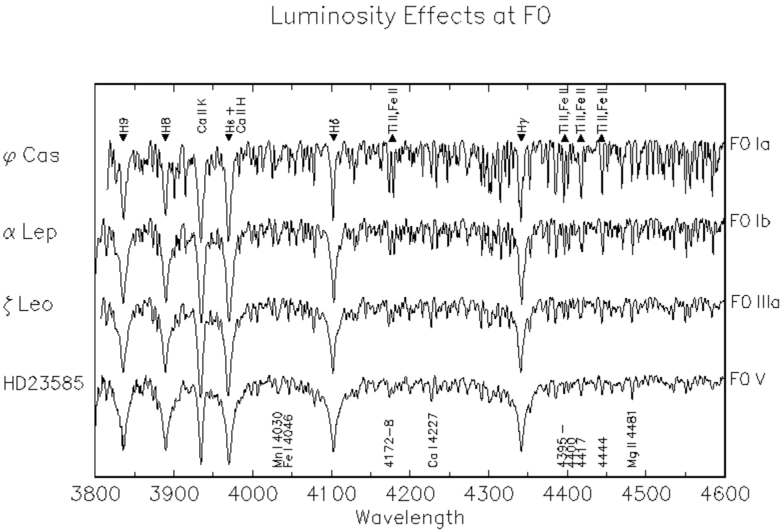
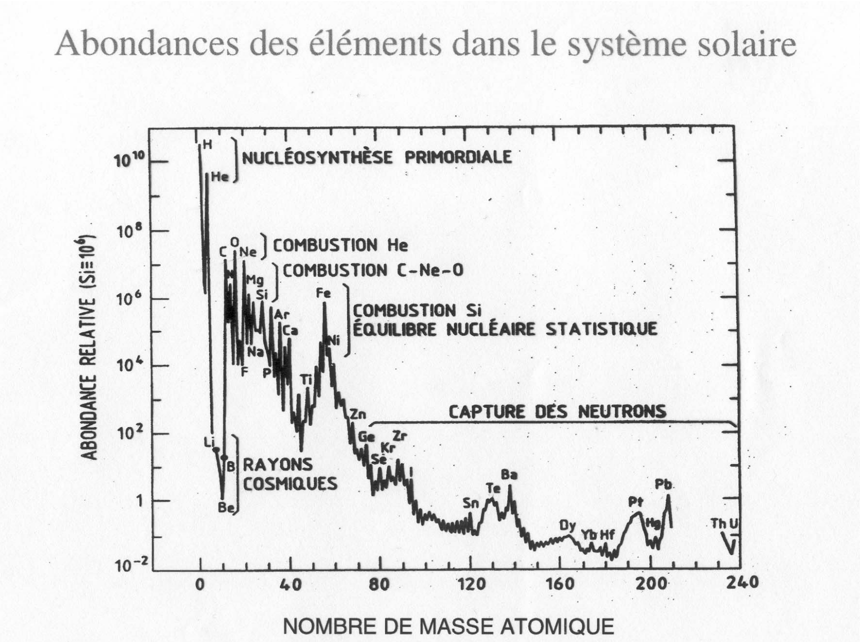


FIGURE: Effet de luminosité.

Spectres stellaires et classification spectrale

- type spectral lié à la $T_{\rm eff}$
- classe de luminosité lié au rayon ou la luminosité intrinsèque :
  - I : supergéantes
  - II : géantes lumineuses
  - III : géantes
  - IV : sous-géantes
  - V : naines
  - VI : sous-naines

Composition chimique



Composition chimique

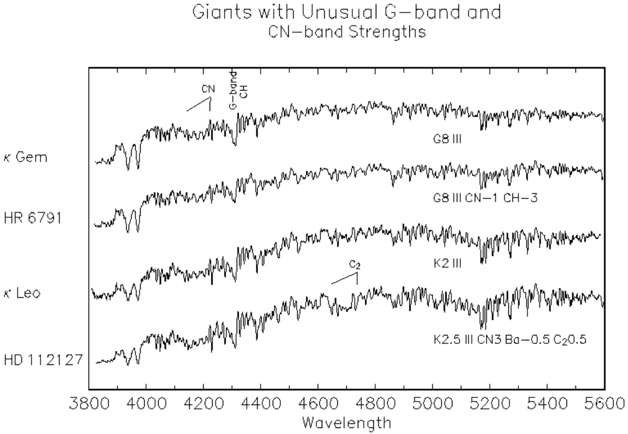


FIGURE: HR 6791 = G8 III (κ Gem = G8 III standard) with weak CN 4216Å band, and very weak G-band (CH). HD 112127= K2.5 III (κ Leo = K2 III standard), has an exceptionally strong CN 4216 Å band, and shows the 4737Å C_2 Swan band, and a clear depression of the continuum in the vicinity of 5200Å, most probably due to the 5165Å C_2 Swan band.

Composition chimique

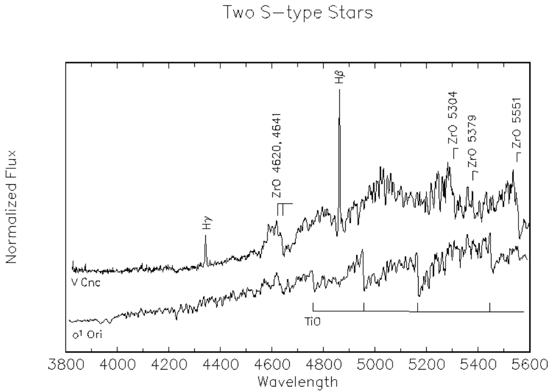


FIGURE: S-type stars = cool giants with ZrO in their spectra. V Cnc : pronounced bands of ZrO. o^1 Ori : marginal S-type star (see the ZrO bandhead at 5551Å, barely visible in o^1Ori). V Cnc shows almost no TiO in o^1 Ori TiO bands are as strong as those in an M4 giant. The strong H emission lines in the spectrum of V Cnc are due to shock waves in its pulsating atmosphere. Some S-type stars also show molecular bands due to YO, VO and LaO.

Composition chimique

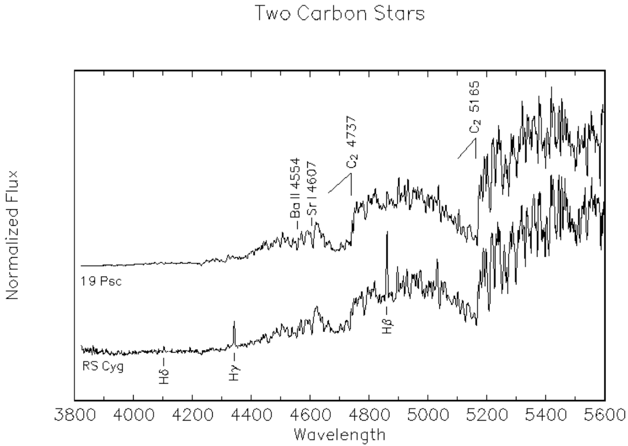


FIGURE: Carbon stars tend to be cool giants (although dwarf carbon stars are known) with greatly enhanced bands of molecules involving carbon, especially the Swan bands of C_2. Some carbon stars also show enhancements of the G-band (CH) and the CN bands. These two carbon stars show strong lines of barium and strontium, both s-process elements.

Diagramme de Hertzsprung – Russell

Comme

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm eff}^4 \qquad (368)$$

les objets de rayon constant sont alignés sur des droites .

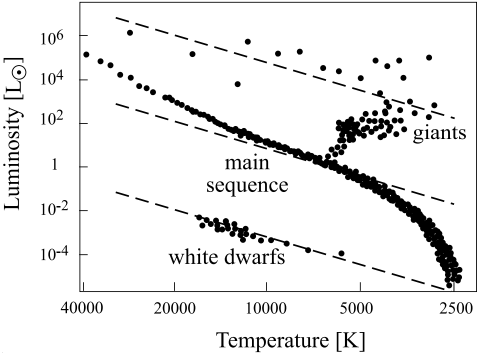


FIGURE: Diagramme HR schématique : luminosité en fonction de la température effective. Les traits pointillés représentent la relation luminosité-température pour des objets de rayons constants (de haut en bas : $100R_\odot$, $1R_\odot$ et $0.01R_\odot$)

Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagramme HR du champ**

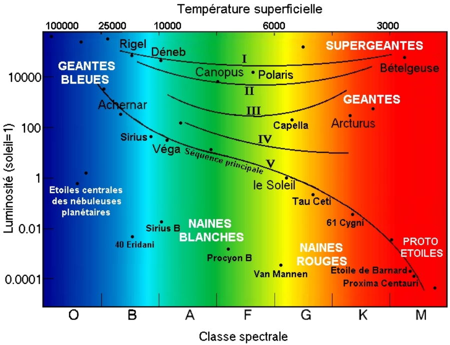


FIGURE: Diagramme HR schématique, classes de luminosité

.

Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagramme HR du champ**

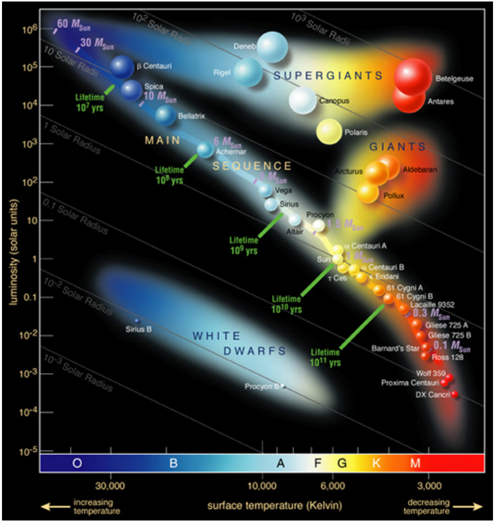


FIGURE: Diagramme HR schématique.

Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagramme HR du champ**

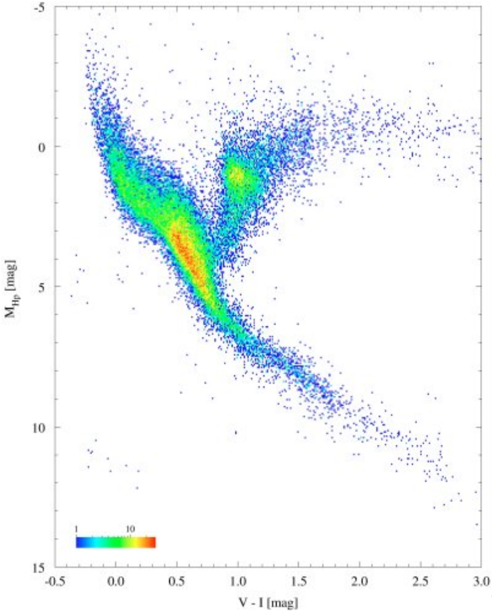


Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagrammes H-R d'amas stellaires**
  - Grands systèmes : les galaxies (spirales, elliptiques, irrégulières) $\rightarrow$ amas ou superamas de galaxies ;
  - Sous-systèmes (= amas stellaires) : étoiles doubles ou multiples, associations (OB), amas globulaires (vieux), amas ouverts (jeunes, quasi-liés).

Dans un amas stellaire :

- se sont formées à peu près en même temps,
- sont formées à partir de matière de même composition
- sont à peu près à la même distance.

Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagrammes H-R d'amas stellaires**

TABLE: Types d'amas

Amas	**Nombre connu**	**Emplacement dans Galaxie**	**Nombre d'étoiles**	**Couleur dominante**	**Densité** $*/pc^3$	**Exemple**
Globulaires	$\approx$ 120	Halo	10^4 - 10^5	rouge	0.5 10^3	Hercule
Ouverts	$\approx$ 900	Disque	100 - 10^3	rouge-bleu	0.1-10	Hyades
Associations	$\approx$ 80	bras spiraux	10 - 100	bleu	0.01	Orion

Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagrammes H-R d'amas stellaires**
  - Si $0 \leq M_{\rm bol} \leq 7.5$; $M > 1.1 M_\odot$:

$$\begin{aligned} M_{\rm bol} &\approx 4.6 - 10.0 \log M/M_\odot & (369) \\ &\text{ou} \\ L/L_\odot &= 1.2 (M/M_\odot)^4 & (370) \\ & & (371) \end{aligned}$$

  - Si $7.5 \leq M_{\rm bol} \leq 11$; $M < 1.1 M_\odot$:

$$\begin{aligned} M_{\rm bol} &\approx 5.2 - 6.9 \log M/M_\odot & (372) \\ &\text{ou} \\ L/L_\odot &= 0.67 (M/M_\odot)^{2.76} & (373) \\ & & (374) \end{aligned}$$

Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagrammes H-R d'amas stellaires**

Relation entre la masse d'une étoile et sa durée de vie sur la séquence principale :

$$\tau_{\mathrm{MS}} = 10^{10}\,\frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} \quad (375)$$

$$= 10^{10}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2} \quad (376)$$

$$(377)$$

$\rightarrow$ Corrélation entre l'âge de l'amas et la morphologie du diagramme HR : point de rebroussement (*"turn-off"*) de la séquence principale

Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagrammes H-R d'amas stellaires**

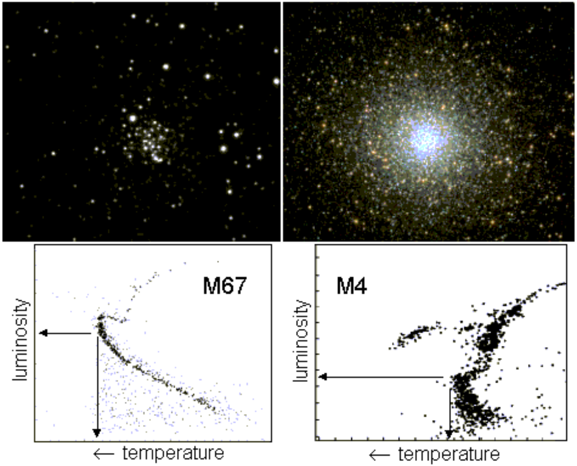


FIGURE: Diagramme HR de deux amas, l'amas ouvert M67 (un amas jeune) et l'amas globulaire M4 (un amas vieux). La luminosité et la température des étoiles au *turn-off* permettent de dater ces amas.

Diagramme de Hertzsprung – Russell

- **Diagrammes H-R d'amas stellaires**
  - Etoiles massives évoluent beaucoup plus rapidement que les étoiles légères :
    $\tau \approx 10^6$ ans pour M = 20 $M_\odot$
    $\tau \approx 10^{10}$ ans pour M = 1 $M_\odot$.
  - Densité d'étoiles dans le diagramme HR $\propto$ temps caractéristique de l'évolution à ce stade.

L'âge de l'Univers

- Les modèles cosmologiques : voir cours de cosmologie.
- Les méthodes radiométriques :
  Désintégration radioactive :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \tag{378}$$

$N_0 \stackrel{def}{=}$ le nombre initial de particules : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

$$\text{demi-vie} \quad N(t_{1/2}) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} N_0 \tag{379}$$

$$\text{Donc :} \quad 1/2 = \frac{\ln(2)}{\lambda} \tag{380}$$

Choix de l'isotope crucial : Demi-vie $\approx$ âges attendus.
Terre et système solaire :
^{187}Re, ^{232}Th et ^{238}U $\rightarrow$ 4.55×10^9 ans

L'âge de l'Univers

- Les étoiles vieilles :
  Modèles de nucléosynthèse, ajustés aux abondances d'éléments non radioactifs, permettent d'estimer les abondances initiales d'éléments radioactifs
  Age déterminé = âge moyen des supernovae dont les résidus ont formé l'étoile considérée.
- L'évolution stellaire :
  Ajustement des modèles d'évolution stellaire aux points de *turn-off* des amas d'étoiles (Fig. 89 et Tab. 8).

L'âge de l'Univers

- Le temps de refroidissement des naines blanches :
  Les naines blanches
  - $\approx$ même masse
  - commencent leur évolution à $\approx$ même température

  $\rightarrow$ Taux de refroidissement très simple.

  Les âges des populations de naines blanches : 12-13 milliard d'années.

  + 500 millions d'années $\rightarrow$ âge de l'Univers.

L'âge de l'Univers

- Conclusion : Age de l'Univers de 13.5×10^9 ans, (estimation cosmologique 13.7×10^9 ans).

L'âge de l'Univers

TABLE: Ages déterminés par datation radioactive dans des étoiles anciennes.

Authors	Isotope	Star	Age
Cowan et al. (1997)	^{232}Th	CS 22892-052	15.2 +/- 3.7 Gyr
Cowan et al. (1999)	^{232}Th	HD115444	15.6 +/- 4.6 Gyr
Cayrel et al. (2001)	^{238}U	CS 31082-001	12.5 +/- 3 Gyr
Wanajo et al. (2002)	^{238}U	CS 31082-001	14.1 +/- 2.5 Gyr

L'âge de l'Univers

TABLE: Ages de divers amas globulaires déterminés par ajustement de modèles au point de *turn-off*.

Authors	Age
Chaboyer et al. 1997	14.6 +/- 1.7 Gyr
Gratton et al. (1997)	11.8 +/- 2.3 Gyr
Reid et al. (1997)	12-13 Gyr
Chaboyer et al. (2001)	11.5 +/- 1.3 Gyr

L'âge de l'Univers

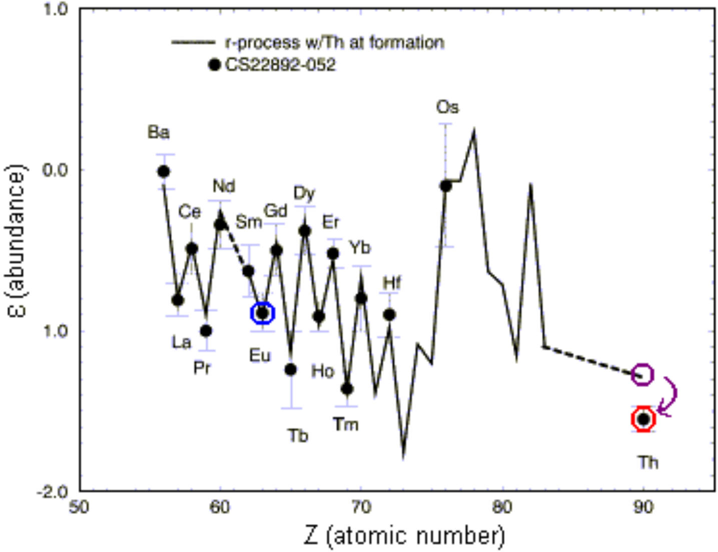


FIGURE: Abondances prédites (trait continu) et observées (points) dans une étoile ancienne. Le Thorium-90 s'est désintégré significativement.

L’âge de l’Univers

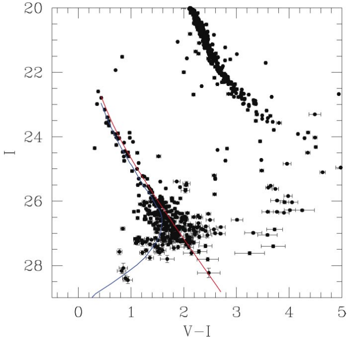


Figure 8 Cluster members are shown, with approximate photometric error bars. The red and blue curves are cooling sequences for a 0.6 $M_\odot$ white dwarf with pure helium and pure hydrogen atmospheres, respectively.

FIGURE: Diagramme couleur-magnitude de naines blanches d’amas globulaire. Naines blanches de $0.6 M_\odot$ avec atmosphère d’hélium pur (courbe rouge) et d’hydrogène pur (courbe bleue).

L'âge de l'Univers

TABLE: Résumé de mesures récentes de l'âge de l'Univers

Méthode	Objet	Age
Cosmologique		13.7 +/- 0.2 Gyr
Radiometrique :	HD 115444	14.5 +/- 3.0 Gyr
	CS 31082-001	16 +/- 5 Gyr
Turn-off séq. principale	Multiple GCs	12.3 +/- 2.5 Gyr
	Multiple GCs	12.0 +/- 1.5 Gyr
Ref. naine blanche	M 4	12.8 +/- 1.1 Gyr

Chap. 6 : Notre galaxie

Analyse statistique

- **Hypothèses :**
  - pas de matière ni d'extinction interstellaire,
  - toutes les étoiles ont une magnitude absolue M,
  - densité spatiale uniforme des étoiles.

$N(m) \stackrel{def}{=}$ nombre d'étoiles plus brillantes que la magnitude apparente m

$$
\begin{aligned}
(m - M) &= 2.5 \log_{10} \frac{d^2}{10^2} && (381) \\
\text{Donc} \quad d &= 10^{1+0.2(m-M)}\ \mathrm{pc} && (382) \\
\text{Donc} \quad N(m) &\propto d^3 && (383) \\
N(m) &= C_1 10^{0.6m} && (384)
\end{aligned}
$$

Analyse statistique

$$N(m) = C_1 10^{0.6m} \tag{385}$$

- Si N(m) obéit à l'Eq. 385 $\rightarrow$ les étoiles sont uniformément distribuées jusqu'à la distance *d* correspondant à cette valeur de *m*
- si $N(m) <$ valeur prédite par l'Eq. 385 au-delà d'une certaine valeur de *m*, on a atteint la limite physique du système à la distance *d* correspondant à cette valeur de *m*.

$\rightarrow$ permet d'évaluer la distribution des étoiles dans notre galaxie, ou la distribution des galaxies autour de notre galaxie.

Le paradoxe d'Olbers

Si l'Univers était infini et uniformément peuplé d'étoiles

$\rightarrow$ la luminosité du ciel serait infinie.

$A(m) \stackrel{def}{=}$ nombre d'étoiles tel que $m \leq m \leq m + dm$:

$$A(m) = \frac{dN(m)}{dm} = C_2 10^{0.6m} \tag{386}$$

avec $C_2 = 0.6 C_1 \ln(10)$.

$$On\ a\ \frac{F_2}{F_1} = 100^{\frac{1}{5}(m_1 - m_2)} = 10^{-\frac{2}{5}(m_2 - m_1)} = 10^{0.4(m_1 - m_2)} \tag{387}$$

$\rightarrow$ luminosité reçue d'une étoile de magnitude apparente m :

$$l(m) = l_0 10^{-0.4m} \tag{388}$$

$\rightarrow$ luminosité reçue des étoiles de magnitude comprises entre m et $m + dm$:

$$l(m)A(m)dm = l_0 C_2 10^{0.2m} dm \tag{389}$$

Le paradoxe d'Olbers

$\rightarrow$ Luminosité reçue par toutes les étoiles plus brillantes que la magnitude apparente m s'écrit :

$$L(m) = \int_{-\inf}^{m} I(m')A(m')dm' = I_0 C_2 \int_{-\inf}^{m} 10^{0.2m'} dm' = K 10^{0.2m} \tag{390}$$

$$avec : \quad K = \frac{I_0 C_2}{0.2 ln 10} = 3 I_0 C_1 \tag{391}$$

$\rightarrow$ $L(m)$ diverge exponentiellement avec m
Galaxie finie, mais pas nécessairement Univers ! Mais :

- age de l'Univers fini
- vitesse de la lumière finie

$\rightarrow$ une quantité finie d'étoiles peut être observée dans le volume d'espace visible depuis la Terre (même avec Univers spatialement infini)
$\rightarrow$ Rayonnement fossile domaine micro-ondes (expansion de l'espace)

Le modèle de Shapley

- Herschel (1785) : Soleil au centre d'un disque formé d'étoiles
- Univers de Kapteyn (XX siècle) : Soleil au centre d'un disque allongé, d'épaisseur quelques centaines de parsec et de rayon quelques kpc
- Shapley (1918) : amas globulaires symétriquement répartis autour du centre de notre Galaxie
  $\rightarrow$ le centre se trouve dans la direction du Sagittaire.

Les chandelles standards

- Les Céphéides : Leavitt (1912) : relation période photométrique et luminosité apparente des Céphéides dans le Petit Nuage de Magellan.
- Les RR Lyrae : Baade (1954) prouve qu'une étoile céphéide est un peu plus brillante qu'une RR Lyrae de même période

La rotation galactique

- 2 sous-systèmes dans notre Galaxie (Lindblad 1927) :
  1. étoiles du disque (en rotation quasi-circulaire autour du centre galactique)
  2. halo et ses amas globulaires (mouvements browniens)

Vitesse du soleil : analyse statistique des mesure des décalages Doppler des étoiles d'amas (qui ont une rotation quasi-nulle autour du CG).

La rotation galactique

• $R_0 \approx 8.0$ kpc du Soleil $\stackrel{def}{=}$ distance Soleil - CG (Sgr A*)
Vitesse d'une étoile sur orbite circulaire de rayon R_0 :

$$\Theta_0 = \Theta_c(R_0) = (220 \pm 20)\ \mathrm{km\ s}^{-1} \tag{392}$$

Mouvement du Soleil pas exactement circulaire $\rightarrow$ vitesse circulaire au niveau du Soleil :

$$\Theta_0 = (236 \pm 15)\ \mathrm{km\ s}^{-1} \tag{393}$$

(erreur : incertitude sur R$_0$)
Mesure du mouvement propre de Sgr A* par rapport à deux sources radio extra-galactiques compactes :

$$\mu_\ell = (-6.379 \pm 0.026)\ \mathrm{mas/an} \quad \mathrm{et} \quad \mu_b = (-0.202 \pm 0.019)\ \mathrm{mas/an} \tag{394}$$

$=$ mouvement apparent du centre galactique dans le ciel, dû à la rotation du Soleil autour du centre galactique.

La rotation galactique

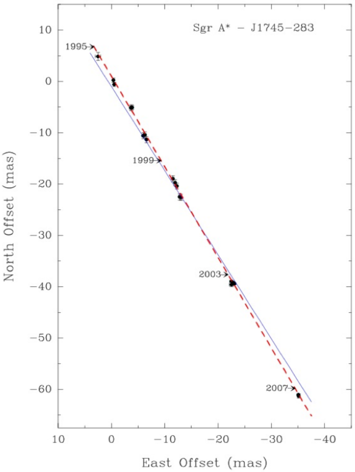


FIGURE: Mouvement propre de la radiosource Sgr A^* située au Centre Galactique. Ce mouvement a lieu presque exactement dans le plan galactique, mais l'écart est significatif et dû au mouvement du Soleil perpendiculairement à ce plan).

La rotation galactique

- *Local Standard of Rest* (LSR) $\stackrel{def}{=}$ référentiel d'inertie centré sur le Soleil et se déplaçant à vitesse Θ_0 dans la direction de la rotation galactique.
Vitesse des étoiles du disque % LSR = 0 en moyenne.

$$\textit{Soleil} : v_S = 13.4\ \mathrm{km\ s^{-1}}\ \text{en direction de l'apex}\ \ell = 28^\circ, b = 32^\circ$$

- $z \stackrel{def}{=}$ distance au plan galactique
$z_d(R) \stackrel{def}{=}$ échelle de hauteur au rayon R (dépend du type d'étoiles considéré).
  - Disque fin ($\sim$ 93% de la masse stellaire de tout le disque) :
    - $z_d \approx 100$ pc : étoiles jeunes (de type O et B) dans le voisinage du Soleil
    - $z_d \approx 300$ pc : étoiles plus vieilles (type G ou K)
  - Disque épais : $z_d \approx 1$ kpc.

Densité d'étoiles dans la direction Z (perpendiculaire au plan galactique)

$$\rho(R, z) = \rho(R, 0)e^{-|z|/z_d(R)} \tag{395}$$

La rotation galactique

Période de révolution du Soleil autour du centre galactique :

$$P = \frac{2\pi R_0}{\Theta_0} \approx 2 \times 10^8 \mathrm{ans} \tag{396}$$

Age de la galaxie $\approx 10^{10}$ ans $\;\rightarrow\; \approx$ 50 révolutions autour du centre galactique.

La rotation galactique

$M_{\text{int}} \stackrel{def}{=}$ masse de la Galaxie à l'intérieur de l'orbite du Soleil (équilibre force centrifuge et force gravitationnelle et en supposant M_{int} sphérique) :

$$\frac{GM_{\text{int}}}{R_0^2} \approx \frac{\Theta_0^2}{R_0} \quad \text{Donc } \mathrm{M_{int}} \approx 10^{11}\mathrm{M}_\odot \tag{397}$$

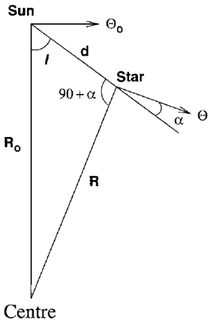


FIGURE: Soleil et une étoile en rotation autour du centre galactique.

La rotation galactique

$$\frac{R}{\sin\ell} = \frac{R_0}{\cos\alpha} \tag{398}$$

et :

$$R_0\cos\ell = d + R\sin\alpha \tag{399}$$

Vitesse radiale relative de l'étoile par rapport au Soleil (sur la ligne de visée) :

$$\vartheta_R = \Theta\cos\alpha - \Theta_0\sin\ell = \left(\frac{\Theta}{R}R_0 - \Theta_0\right)\sin\ell \tag{400}$$

Vitesses angulaires du Soleil et de l'étoile :

$$\omega_0 = \Theta_0/R_0, \qquad \omega = \Theta/R \tag{401}$$

$$\vartheta_R = (\omega - \omega_0)R_0\sin\ell \tag{402}$$

La rotation galactique

Vitesse tangentielle relative de l'étoile par rapport au Soleil :

$$\vartheta_T = \Theta \sin\alpha - \Theta_0 \cos\ell \quad (403)$$

$$= \Theta \frac{R_0 \cos\ell - d}{R} - \Theta_0 \cos\ell \quad (404)$$

$$= (\omega - \omega_0) R_0 \cos\ell - \omega d \quad (405)$$

La rotation galactique

- **Le voisinage solaire** $\stackrel{def}{=}$
  - volume centré sur le Soleil
  - assez petit pour que la distribution des propriétés des étoiles $\approx$ constante
  - assez grand pour contenir un nombre représentatif d'étoiles

$\approx$ quelques centaines de pc
Naines M : quelques dizaines de pc
Etoiles O ou B : 1 kpc

La rotation galactique

component	volume density ($\mathcal{M}_\odot\,\mathrm{pc}^{-3}$)	surface density ($\mathcal{M}_\odot\,\mathrm{pc}^{-2}$)	luminosity density ($L_\odot\,\mathrm{pc}^{-3}$)	surface brightness ($L_\odot\,\mathrm{pc}^{-2}$)
visible stars	0.033	29	0.05	29
stellar remnants	0.006	5	0	0
brown dwarfs	0.002	2	0	0
ISM	0.050	13	0	0
total	0.09 ± 0.01	49 ± 6	0.05	29
dynamical	0.10 ± 0.01	74 ± 6	–	–

TABLE: Inventaire du voisinage solaire et densité de surface correspondante. (Source : Astrophysique III : Dynamique stellaire et galactique, P. North)

La rotation galactique

- **Voisinage solaire :** $d \ll R_0$

$$R - R_0 = d\cos\ell \tag{406}$$

$$\begin{aligned}
\omega - \omega_0 &= \left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R_0}(R - R_0) && (407)\\
&= \left[\frac{1}{R_0}\left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_0} - \frac{\Theta_0}{R_0^2}\right](R - R_0) && (408)\\
&= \left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_0}\right]\frac{d}{R_0}\cos\ell && (409)\\
& && (410)
\end{aligned}$$

(en éliminant ω à l'aide de l'Eq. 401, puis en utilisant l'Eq. 406).

La rotation galactique

- **Voisinage solaire :**

$\rightarrow$ vitesse radiale (Eq. 402) :

$$\vartheta_R = \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_0}\right] d \sin 2\ell \qquad (411)$$

(NB : $\vartheta_R = 0$ vers le centre galactique, vers $\ell = 90°$ et $\ell = 180°$).

$\rightarrow$ vitesse tangentielle (Eq. 405) :

$$\vartheta_T = \left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_0}\right] d \cos^2 \ell - \frac{\Theta}{R} d \qquad (412)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_0}\right] d \cos 2\ell \qquad (413)$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_0}\right] d \qquad (414)$$

(car $\cos^2 \ell = \frac{1}{2}(\cos 2\ell + 1)$).

La rotation galactique

- **Voisinage solaire :**

$$\vartheta_R = Ad \sin 2\ell \quad (415)$$

$$\vartheta_T = Ad \cos 2\ell + Bd \quad (416)$$

avec A et B $\stackrel{def}{=}$ *constantes de Oort* :

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_0}\right] = -\frac{1}{2}R_0\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R_0} \quad (417)$$

$$B = -\frac{1}{2}\left[\frac{\Theta_0}{R_0} + \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_0}\right] \quad (418)$$

$$(419)$$

Meilleures déterminations actuelles des constantes de Oort (HIPPARCOS) :

$$A = 14.8 \pm 0.8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \quad (420)$$

$$B = -12.4 \pm 0.6 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \quad (421)$$

La rotation galactique

- **Voisinage solaire :**

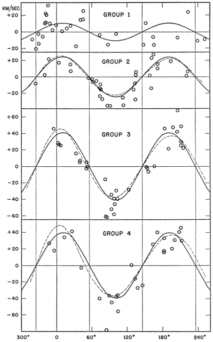


FIG. 5.—Rotational curves for groups 1–4. The velocities used in the solutions are plotted against galactic longitude. The continuous curve represents the Oort solution; the dashed curve includes the higher-order terms according to Bottlinger's formula.

FIGURE: Vitesse radiale pour 4 groupes d'étoiles Céphéides situées à 4 distances différentes, estimées grâce à leurs périodes photométriques. Les coordonnées galactiques sont indiquées dans un système de coordonnées ancien dans lequel le centre galactique était situé à $\ell = 325.3°$ (et pas l'actuel, dans lequel le centre galactique serait à $\ell = 0°$)

Chap. 7 : Les phases du milieu interstellaire : Nébuleuses gazeuses et régions HII

Les sources d’énergie du milieu interstellaire

- **Champ de rayonnement :**
  - X : émission par plasma chaud + composante extragalactique
  - UV : tout le flux est absorbé pour $h\nu > 13.6$eV (ou $\lambda < 912$ Å, coupure de Lyman)
  - Visible : photons stellaires absorbés et réémis dans l’IR
  - Millimétrique : rayonnement cosmologique à 2.7K

Les sources d'énergie du milieu interstellaire

- **Champ de rayonnement :**

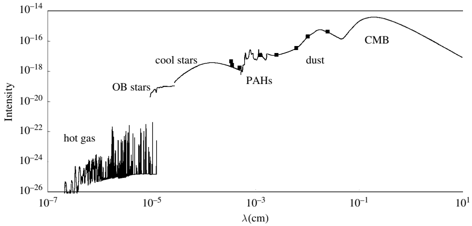


Figure 1.8 The mean intensity in units of erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} sr^{-1} of the interstellar radiation field in the solar neighborhood. Contributions by hot gas, OB stars, older stars, large molecules (PAHs), dust, and the cosmic microwave background are indicated. Figure adapted from J. Black, 1996, *First Symposium on the IR Cirrus and Diffuse Interstellar Clouds*, ed. R. M. Cutri and W. B. Latter (San Francisco: ASP), p. 355. The calculated X-ray/EUV emission spectrum and the FUV spectrum were kindly provided by J. Slavin. The dust emission is a fit to the COBE results for the galactic emission. The PAH spectrum was taken from ISO measurements of the mid-IR emission spectrum of the interstellar medium scaled to the measurements of the IR cirrus by IRAS (F. Boulanger, 2000, in *ISO Beyond Point Sources: Studies of Extended Infrared Emission*, ed. R. J. Laureijs, K. Leech, and M. F. Kessler, *E. S. A.-S. P.,* **455**, p. 3). The black squares at 12, 25, 60 and 100 µm are the IRAS measurements of the IR cirrus, the DIRBE/COM measurement at 240 µm, and those at 3.3, 3.5, and 4.95 µm are the balloon measurement by Proneas experiment (M. Giard, J. M. Lamarre, F. Pajot, and G. Serra, 1994, *A. & A.*, **286**, p. 203). Note that the latter have been superimposed on the stellar spectrum.

FIGURE: Intensité moyenne du champ de rayonnement dans le voisinage solaire.

Les sources d'énergie du milieu interstellaire

- **Champ magnétique : Manifestations :**
  - polarisation linéaire de la lumière (interaction grains)
  - effet Zeeman raie à 21cm
  - effet Zeeman sur les molécules (OH, CN)

$\rightarrow$ B $\approx$ 5-8 μG

Les sources d’énergie du milieu interstellaire

- **Champ magnétique :**

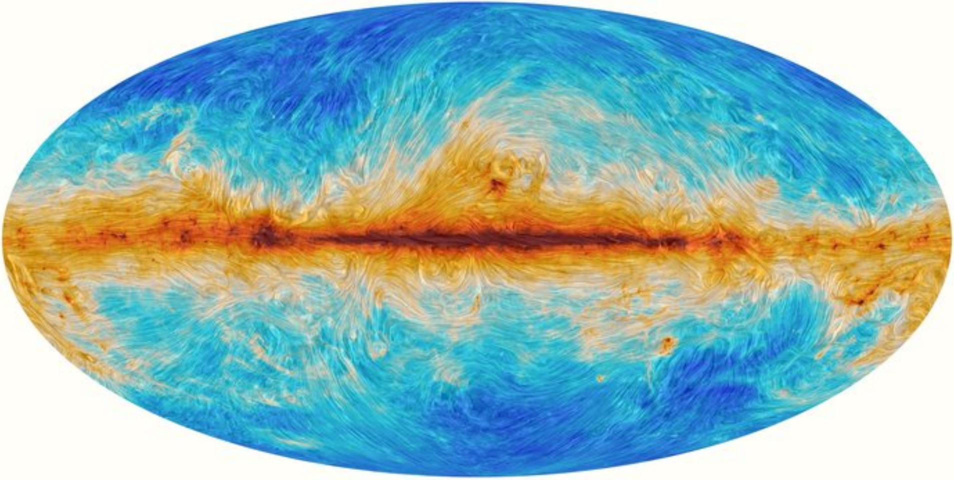


FIGURE: Emission polarisée par les nuages de poussière de la Voie Lactée. Couleurs = intensité de l’émission par les grains de poussière à 353, 545 et 857 GHz. Texture = mesures de polarisation à 353Ghz.

Les sources d'énergie du milieu interstellaire

• **Les rayons cosmiques** $\stackrel{def}{=}$ particules de haute énergie ($\geq$ 100MeV/nucléon)

- protons relativistes (énergies entre 1 et 10 GeV)
- 10% d'hélium
- 1% d'éléments plus lourds et d'électrons

Abondances non-solaire ($\rightarrow$ formation par spallation)
Forte modulation par le vent solaire $\rightarrow$ flux difficile à mesurer

• **L'énergie cinétique**
Provient des vents d'étoiles chaudes et des associations OB.
Met en mouvement le milieu interstellaire

Les sources d'énergie du milieu interstellaire

- **Les rayons cosmiques**

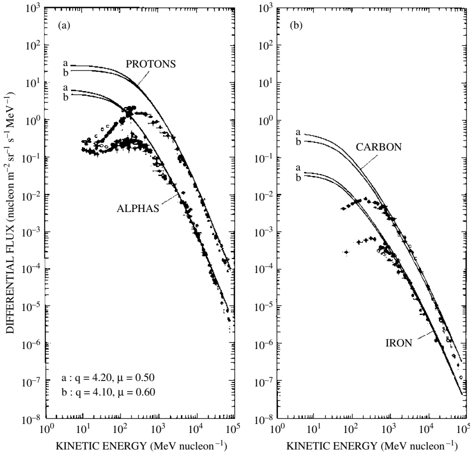


Figure 1.11 The cosmic-ray proton flux as a function of energy measured near the Earth and the inferred interstellar cosmic-ray flux after the effects of modulation by the solar wind have been taken into account. Figure reproduced with permission from W.-H. Ip and W. I. Axford, 1985, *A. & A.*, **149**, p. 71.

Les sources d’énergie du milieu interstellaire

FIGURE: Image composite (temps d’exposition : 40h). Sirius est l’étoile brillante en bas à gauche et on reconnait les Pléiades au dessus des arbres à droite.

Les phases de l'ISM

- Poussières (cause extinction + rougissement) : 1% en masse
- Gaz (raies en absorption très étroites) : 99% en masse

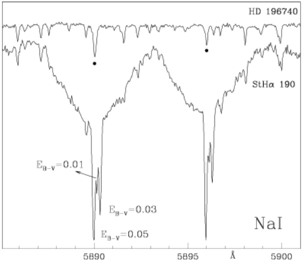


FIGURE: Doublet du sodium Na I : raie stellaire (élargie par rotation) de l'étoile symbiotique StHα 190 et 3 fines raies interstellaires superposées.

Problème : ce gaz n'émet pas en visible

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI**

Dans un nuage d'H I, tous les atomes d'hydrogène ont leur électron dans l'état fondamental.
Justification :

- Taux de désexcitation du 1^{er} état excité vers le fondamental (= Lyα) : coefficient d'Einstein $A_{2,1} = 6.27 \times 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$ (cf Table).
- Taux de collision : $1/\tau_{\mathrm{coll}} \approx (10^{-6}\mathrm{n_e})\mathrm{s}^{-1}$ ($n_e =$ densité d'électrons libres)
- Densités rencontrées dans l'espace interstellaire (cf Table)

$\rightarrow$ toute transition (collisionnelle ou radiative) vers le 1^{er} état excité est immédiatement suivie d'une désexcitation spontanée (idem pour autres états excités)
$\rightarrow$ tous les e^- dans l'état fondamental
$\rightarrow$ ETL non valable pour l'atome d'HI (transitions états excités vers le fondamental)... MAIS...

Les phases de l'ISM

• Les régions HI

Table C.1. Line data for the hydrogen atom[a]

Designation	Transition[b] i–j	$\lambda_{i,j}$(nm)[e]	$f_{i,j}$[c]	$A_{j,i}$[d](s^{-1})
Ly α[f]	1–2	121.567	0.4162	4.699×10^8
Ly β	1–3	102.572	0.07910	5.575×10^7
Ly γ	1–4	97.254	0.02899	1.278×10^7
Ly_{limit}	1–∞	91.18		
H α	2–3	656.280	0.6407	4.410×10^7
H β	2–4	486.132	0.1193	8.419×10^6
H γ	2–5	434.046	0.04467	2.530×10^6
H δ	2–6	410.173	0.02209	9.732×10^5
H ϵ	2–7	397.007	0.01270	4.389×10^5
H_8	2–8	388.905	0.008036	2.215×10^5
H_{limit}	2–∞	364.6		
P α	3–4	1875.10	0.8421	8.986×10^6
P β	3–5	1281.81	0.1506	2.201×10^6
P γ	3–6	1093.81	0.05584	7.783×10^5
P_{limit}	3–∞	820.4		
B α	4–5	4051.20	1.038	2.699×10^6
B β	4–6	2625.20	0.1793	7.711×10^5
B γ	4–7	2165.50	0.06549	3.041×10^5
B_{limit}	4–∞	1458.4		
H109α[g]	110–109	5.985 cm		7.0×10^{-4}
HI	1–1[h]	21.106114 cm		2.876×10^{-15}
Deuterium I	1–1[h]	91.5720 cm		4.65×10^{-17}

[a]From Ref. [44] unless otherwise indicated.
[b]The upper level is j and the lower level is i, where i and j are indices representing the principal quantum numbers, unless otherwise indicated.
[c]Absorption oscillator strengths (see Appendix D.1.3) for transitions from lower level i to upper level j.
[d]Average Einstein A coefficient for transitions from upper level j to lower level i. The average value means that the particles are assumed distributed in their substates (determined by the orbital angular momentum quantum number, l) according to the statistical weights of those substates.
[e]Units are nm unless otherwise indicated.
[f]The Einstein A coefficient for the permitted transition is $A_{2p\to 1s} = 6.27 \times 10^8\ s^{-1}$ (Ref. [50]). See Sect. 8.4 for a discussion of the forbidden transition.
[g]The wavelength is from Eq. (C.7) and the Einstein A coefficient from $A_{n+1\to n} = 1.167 \times 10^9/n^6$ Ref. [50].
[h]Transition between the hyperfine splitting of the ground state.

TABLE: Données pour l'atome d'hydrogène

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI**

Table 3.1. Sample densities and temperatures in astrophysical gases[a]

Location	n_e [b] (cm^{-3})	$n_m + n_H$ [c] (cm^{-3})	T (K)
Interplanetary Space	$1 - 10^4$	≈ 0	$10^2 - 10^3$
Solar corona	$10^4 - 10^8$	≈ 0	$10^3 - 10^6$
Stellar atmosphere	10^{12}	≈ 0	10^4
Stellar interiors	10^{27}	≈ 0	$10^{7.5}$
Planetary nebulae	$10^3 - 10^5$	≈ 0	$10^3 - 10^4$
HII regions	$10^2 - 10^3$	≈ 0	$10^3 - 10^4$
Interstellar space[d]	$10^{-3} - 10$ (avg. $\approx$ 0.03)	$10^{-2} - 10^5$ (avg. $\approx$ 1)	10^2
Intergalactic space	$< 10^{-5}$	≈ 0	$10^5 - 10^6$
Intergalactic HI clouds[e]		$10^{-6} - 10^{-3}$	$10^3 - 10^5$

[a] Ref. [96] unless otherwise indicated.
[b] Electron density. For a pure hydrogen gas that is completely ionized, $n_e = n_p$ where n_p is the proton density.
[c] n_m is the molecular gas density (predominantly H_2) and n_H is the neutral atomic hydrogen (HI) gas density.
[d] The temperature quoted here is typical of interstellar HI clouds. However, there is a wide variety of densities, temperatures and degrees of ionization in the interstellar medium. For example, molecular clouds tend to have low temperatures (5–200 K, typically 30 K) and high densities (10^2–$10^5\ \mathrm{cm}^{-3}$, typically $10^4\ \mathrm{cm}^{-3}$). On the other hand, for ionized diffuse intercloud gas at $n_e \approx 0.03\ \mathrm{cm}^{-3}$ the temperatures are much higher ($\approx 10^4$ K).
[e] Typical density range for the Ly α forest (see Figure 5.6 and Ref. [129]) for a redshift (Sect. 7.2.2) of $z = 3.1$. The ionized fraction is not easily determined. Values will vary with redshift.

TABLE: Densités et températures de gaz astrophysique.

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Prédiction de Van de Hulst (1945)

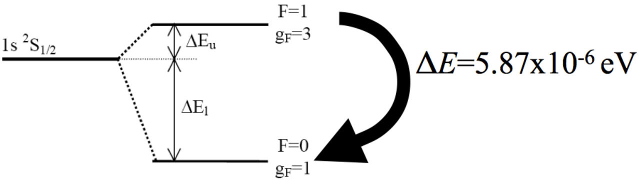


FIGURE: Séparation hyperfine du niveau fondamental ($n = 1, l = 0$). Niveau hyperfin du haut : spin du noyau et spin de l'électron alignés (opposés dans le niveau hyperfin du bas). Ce splitting est présent à tous les niveaux n, et chaque état n possède donc une multiplicité $2n^2$.

$$\Delta E = 5.87 \times 10^{-6}\ \mathrm{eV} \quad (422)$$

$$\nu = \Delta E/h = 1420\ \mathrm{MHz} \quad (423)$$

$$\lambda = c/\nu = 21.11\ \mathrm{cm} \quad (424)$$

Les phases de l'ISM

• **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Avantages :

- Raie étroite (émise par du gaz froid) $\rightarrow$ résolution en vitesse radiale est très bonne
- Ondes radio pas absorbées par la poussière interstellaire

$\rightarrow$ Distribution de l'hydrogène galactique (donc du gaz) réalisée grâce à cette transition à 21cm

$\rightarrow$ Pas de carte comparable pour les étoiles !

Température de spin $T_S \stackrel{def}{=}$ Température d'excitation de cette raie

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

...MAIS : raie de HI à 21cm
Taux de désexcitation spontané du niveau hyperfin du haut :
$A_{UL} = 3 \times 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-1}$,
$\rightarrow$ Demi-vie radiative : $\tau_{UL} = 1/A_{UL} \approx 3.5 \times 10^{14} s \approx 11$ millions d'années.
$\rightarrow$ Désexcitation spontanées extrêmement rares
$\rightarrow$ Aux densités de l'ISM, transition est *induite par collision*
$\rightarrow$ La raie HI à 21cm est à l'ETL
$\rightarrow$ Collisions avec des particules décrites par leur température cinétique T
$\rightarrow$ Equation de Boltzmann pour la transition entre niveaux hyperfins du fondamental de H I valable pour $T_{\mathrm{exc}} = T = T_S$
Dans l'ISM l'ETL n'est pas valable pour l'atome d'HI, mais est bien valable pour la raie à 21cm

Les phases de l'ISM

• **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

$$\frac{N_U}{N_L} = \frac{g_U}{g_L} e^{-(h\nu)/kT_S} \tag{426}$$

Pour H :

- $g_n = 2n^2$ ($n =$ nombre quantique principal)
- $g_F = 2F + 1$ pour les états hyperfins

Comme $h\nu \ll kT$ pour cette raie :

$$\frac{N_U}{N_L} = \frac{g_U}{g_L} = \frac{3}{1} = \frac{n_U}{n_L} \tag{427}$$

n_U et $n_L \stackrel{def}{=}$ densités d'atomes dans l'état hyperfin 2 et 1
$n_{\mathrm{HI}} \stackrel{def}{=}$ densité de l'H neutre

Les phases de l'ISM

• **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Donc

$$\frac{n_L}{n_{\mathrm{HI}}} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{n_U}{n_{\mathrm{HI}}} = \frac{3}{4} \tag{428}$$

Profondeur optique :

$$\tau_\nu = \sigma_\nu \int_l n_1 \, dl = \frac{1}{4}\, \sigma_\nu \int_l n_{\mathrm{HI}} \, dl = \frac{1}{4}\, \sigma_\nu \, \mathcal{N}_{\mathrm{HI}} \tag{429}$$

(SI σ_ν ne varie pas le long de la ligne de visée) avec

$$\mathcal{N}_{\mathrm{HI}} \stackrel{def}{=} \int_l n_{\mathrm{HI}} \, dl = \text{ Densité de colonne} \tag{430}$$

Rappel : La profondeur optique :

$$
\begin{aligned}
d\tau_\nu &= -\chi_\nu \, dz && (431)\\
&= -\kappa_\nu \, dz \quad \text{si pas de diffusion} && (432)\\
&= -\sigma_\nu \, n \, dz && (433)\\
&= -K\rho \, dz && (434)
\end{aligned}
$$

où

- σ_ν est la section efficace effective d'interaction (cm^2)
- κ_ν est le coefficient d'absorption (cm^{-1})
- K est le coefficient d'absorption massique ($cm^2 \, g^{-1}$)
- n est la densité de particules (cm^{-3})
- ρ est la masse volumique ($g \, cm^{-3}$)

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Coefficient d'extinction à l'ETL (Eq. 98) :

$$\chi_\nu^{\mathrm{net}*} = \frac{h\nu}{4\pi} N_L \phi_\nu B_{LU} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \tag{435}$$

Comme :

$$B_{12} g_1 \quad = \quad B_{21} g_2 \quad \text{et} \quad A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \tag{436}$$

$$\chi_\nu^{\mathrm{net}*} \quad = \quad \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \frac{g_U}{g_L} N_L \; \phi_\nu \; A_{UL} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \tag{437}$$

$$\approx \quad \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \, 3 \, \left(\frac{n_{\mathrm{HI}}}{4}\right) \; \phi_\nu A_{UL} \frac{h\nu}{kT_S} \tag{438}$$

$$\approx \quad \frac{3hc^2}{32k\pi} \, \frac{A_{UL} n_{\mathrm{HI}}}{\nu} \, \frac{\phi_\nu}{T_S} \tag{439}$$

où n_{HI} = nombre d'atomes d'hydrogène neutre par cm^3.

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Donc

$$
\begin{aligned}
d\tau_\nu &= -\chi_\nu \, dl \\
\tau_\nu &= \frac{3hc^2 A_{UL}}{32k\pi\nu} \int_{\mathrm{ldv}} n_{\mathrm{HI}} \, \frac{\phi_\nu}{T_S} dl = \frac{3hc^2 A_{UL}}{32k\pi\nu} \, \mathcal{N}_{\mathrm{HI}} \, \frac{\phi_\nu}{T_S} \\
\int_\nu \tau_\nu d\nu &= \frac{3hc^2 A_{UL}}{32k\pi\nu} \, \frac{\mathcal{N}_{\mathrm{HI}}}{T_S} \int_\nu \phi_\nu d\nu = \frac{3hc^2 A_{UL}}{32k\pi\nu} \, \frac{\mathcal{N}_{\mathrm{HI}}}{T_S}
\end{aligned}
$$

Hyp : T_S constant le long de la ligne de visée (mais pas la densité).

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathrm{HI}} &= (3.85 \times 10^{14}) \; T_S \int_\nu \tau_\nu d\nu \qquad [\mathrm{cm}^{-2}] \qquad (440) \\
&= (1.82 \times 10^{18}) \; T_S \int_v \tau_v dv \qquad [\mathrm{cm}^{-2}] \qquad (441)
\end{aligned}
$$

Densité de colonne : cm^{-2} et vitesse : km/s.

Les phases de l'ISM

• **Les régions HI : raie de HI à 21cm**
Rappel : Température de brillance :

$$I_\nu = B_\nu(T_{\mathrm{B}\nu}) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_{\mathrm{B}\nu}}}-1} \tag{442}$$

Dans le régime de Rayleigh-Jeans ($h\nu \ll kT$) :

$$I_\nu \quad = \quad \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{kT_{\mathrm{B}\nu}}{h\nu} = \frac{2\nu^2}{c^2}\,kT_{\mathrm{B}\nu} \propto T_{\mathrm{B}\nu} \tag{443}$$

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Solution de l'équation de transfert (Eq. 63) :

$$T_{\mathrm{B}\nu} = T_{\mathrm{B}\nu,0}\, e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad \text{avec source d'arrière-plan}$$
$$T_{\mathrm{B}\nu} = T\,(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad \text{sans source d'arrière-plan}$$

$T_{\mathrm{B}\nu,0} \stackrel{def}{=}$ température de brillante de la source d'arrière plan
$T_{\mathrm{B}\nu} \stackrel{def}{=}$ température de brillante du nuage HI
$T =$ température cinétique (supposée = température de spin)
$\tau_\nu =$ la profondeur optique du nuage HI
NB : Sans source d'arrière-plan, on a :

$$T_{\mathrm{B}\nu} = T \qquad \tau_\nu \gg 1 \text{ : optiquement épais}$$
$$T_{\mathrm{B}\nu} = T\,\tau_\nu \qquad \tau_\nu \ll 1 \text{ : optiquement mince}$$

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

$$\text{Sans source d'arrière-plan : } e^{-\tau_\nu} = 1 - \frac{T_{\mathrm{B}\nu}}{T_{\mathrm{S}\nu}} \tag{444}$$

$$\mathcal{N}_{\mathrm{HI}} = -(1.82 \times 10^{18})\ T_S \int_v \ln\left(1 - \frac{T_{\mathrm{B}}(v)}{T_{\mathrm{S}}(v)}\right) dv \qquad [\mathrm{cm}^{-2}] \tag{445}$$

- $T_{\mathrm{B}}(v)$, ou I_ν = quantité observée.
- Si T_S connu, alors $\mathcal{N}_{\mathrm{HI}}$ connue
- $T_{\mathrm{B}} \leq T_S \ \rightarrow \ \mathcal{N}_{\mathrm{HI}} > 0$

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Démonstration $T_{\rm B} \leq T_S$:

- $T_{\rm B\nu} = T \quad (\tau_\nu \gg 1)$ ou $T_{\rm B\nu} = T\,\tau_\nu \quad (\tau_\nu \ll 1)$
- Ou alors, via l'Eq de transfert :

$$I_\nu = B_\nu(T) \qquad \text{cas optiquement épais } (\tau_\nu \gg 1)$$
$$I_\nu = I_{\nu 0}(1-\tau_\nu) + B_\nu(T)\tau_\nu \qquad \text{cas optiquement mince } (\tau_\nu \ll 1)$$

Sans source d'arrière-plan, ($I_{\nu 0} = 0$) $\rightarrow$ $I_\nu \leq B_\nu(T)$
Or $I_\nu \propto T_{\rm B\nu}$, et $B_\nu \propto T_{\rm cin}$ (Rayleigh Jeans).
Donc $T_{\rm B} \leq T$
$T_{\rm B}$ = limite inférieure à la température de la source.

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**
  - Si raie opt. épaisse à $v \rightarrow T_{\mathrm{B}} = T_S \rightarrow \mathcal{N}_{\mathrm{HI}}$ pas calculable (on ne voit que la partie avant du nuage)
  - Si la raie opt. mince :

$$\underset{[\mathrm{cm}^{-2}]}{\mathcal{N}_{\mathrm{HI}}} = (1.82 \times 10^{18}) \int_v \underset{[K]}{T_{\mathrm{B}}(v)} \underset{[\mathrm{kms}^{-1}]}{dv} \quad (\tau_\nu \ll 1)$$

  - $\mathcal{N}_{\mathrm{HI}}$ calculable sans connaître ni la température du gaz, ni la distance.
  - Résultat important car la raie à 21cm est très souvent opt. mince.
  - Une fois que $\mathcal{N}_{\mathrm{HI}}$ connue, la masse de HI peut être calculée, si on connait la distance.

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Mesure de $I(\ell, b, \lambda)$ ou $I(\ell, b, \vartheta_R)$ $\rightarrow$ distribution du gaz interstellaire

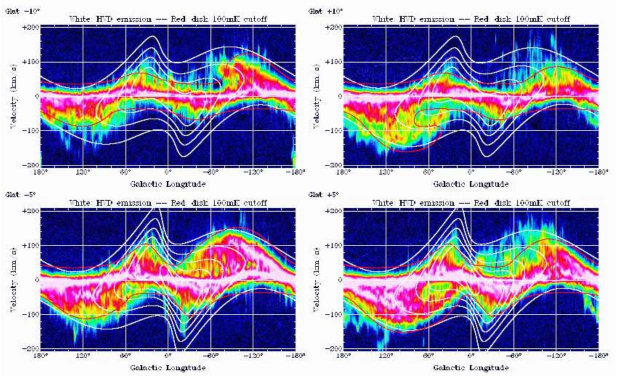


Fig. 10. Position-velocity diagrams for the Milky Way H I brightness termerature at latitudes -10°, -5°(left) and 10°, 5°(right). The white isophotes display HVD emission from the model (10% to 90% in steps of 10%), the red isophote marks an average disk emission of 100mK. A logarithmic transfer function was used for $T_B < 30$K.

FIGURE: Diagramme position-vitesse $I(\ell, b = -10°, -5°, 5°, 10°, \vartheta_R)$, dans le plan $\ell - \vartheta_R$ de la raie à 21cm

Les phases de l'ISM

• Les régions HI : raie de HI à 21cm

Application : $\omega(r)$ $(r \leq R_0)$:

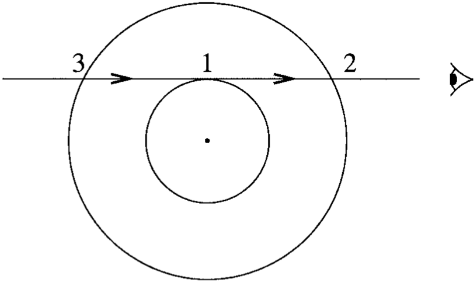


FIGURE: Point 1 = point où la ligne de visée est tangente à l'orbite (circulaire)= point ou $|\vartheta_R|$ max (Hyp : $|\vartheta_R|$ augmente vers centre galactique).

$\vartheta_R = (\omega - \omega_0) R_0 \sin \ell \quad \rightarrow \quad |\vartheta_R|$ maximum quand $|\omega - \omega_0|$ maximum $\quad \rightarrow \quad$ distribution de $\omega(r)$ pour $r \leq R_0$.

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Application : Distribution des nuages

- Pic d'intensité de $I(\ell, \vartheta_R)$ à ℓ et $\vartheta_R \quad \rightarrow \quad$ nuage en 2 ou en 3
- Détermination de la distance du nuage par son étendue angulaire

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Application : Structure de la Galaxie

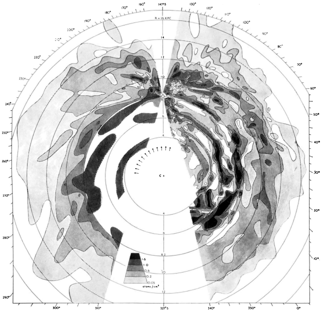


FIG. 4.—*Distribution of neutral hydrogen in the Galactic System. The maximum densities in the z-direction are projected on the galactic plane, and contours are drawn through the points.*

FIGURE: Distribution d'hydrogène neutre dans le plan galactique, à partir d'observations de HI à 21cm

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Application : Structure de la Galaxie

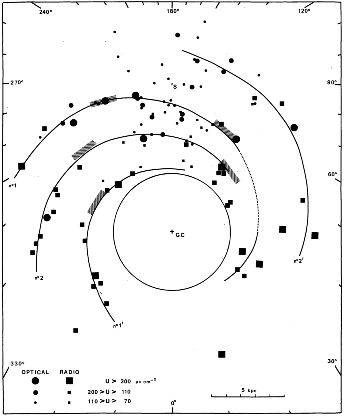


Fig. 11. Spiral model of our Galaxy obtained from high-excitation-parameter H II regions ($U > 70\,\mathrm{pc\,cm^{-2}}$); the resulting spiral pattern has two symmetrical pairs of arms (i.e. four altogether). No. 1. Major arm: *Sagittarius-Carina arm*; No. 2. Intermediate arm: *Scutum-Crux arm*; No. 1′. Internal arm: *Norma arm*; No. 2′. External arm: *Perseus arm*. Hatched areas correspond to intensity maxima in the radio continuum and in neutral hydrogen

FIGURE: Le modèle de Georgelin & Georgelin (1976, A&A. 49, 57) de galaxie spirale pour la Voie Lactée.

Les phases de l'ISM

- **Les régions HI : raie de HI à 21cm**

Application : Structure de la Galaxie

FIGURE: Images de deux galaxies spirales, NGC 1300 (gauche) and NGC 3370 (droite), qui pourraient présenter des points communs avec notre Galaxie (mais de grandes incertitudes subsistent). Notre Galaxie = galaxie spirale (meilleure supposition : type Sb ou Sc)

Les phases de l'ISM

- **Les nuages moléculaires**
  - régions denses et froides de l'ISM :
    densité $\approx 10^9$ particules/cm^3, températures $\approx 10 - 30$K
  - Molécule la plus abondante : H_2 : pas de moment dipolaire électrique permanent $\rightarrow$ pas de rayonnement dipolaire via transitions rotationnelles
  - 2nde molécule la plus abondante : CO
  - Fréquence fondamentale ($J = 1 \rightarrow 0$) = 115 GHz (2.6mm) excitée par collision avec H_2, puis 230GHz, 345GHz, etc.
  - distribution galactique de CO différente de celle de HI

Les phases de l'ISM

- **Nébuleuses gazeuses**

2 groupes principaux :

- Les régions HII ou nébuleuses diffuses :
  - Un corps noir de T$=$ 35 000K (O8V) émet 32% de photons $h\nu > 13.6$ eV.
  - $\rightarrow$ *région HII* = région d'hydrogène ionisé autour des étoiles jeunes (OB)
  - *sphère de Stromgren* = bord extérieur de la nébuleuse = front d'ionisation
  - régions HII concentrées dans les bras spiraux des galaxies
- Les nébuleuses planétaires :
  - Coquilles de matière éjectées par des étoiles de masse faible et intermédiaire (1-8$M_\odot$)
  - Tures naines blanches centrales : $\sim$ 50 000 à 100 000 K
  - Plus ionisées que les régions HII

Les phases de l'ISM

- **Nébuleuses gazeuses**

Et aussi :

- Coquilles de novae ou de supernovae
- Galaxies actives (mêmes processus physiques mais photons plus énergétiques

Les phases de l'ISM

• **Nébuleuses gazeuses : Recombinaison de l'Hydrogène**
Raies de recombinaison :

$$e^- + p \rightarrow h\nu + H^*(n\ell) \tag{446}$$

Puis cascades radiatives :

$$n = 2, 3, 4, ... \rightarrow 1 \qquad \mathrm{Ly}\alpha, \mathrm{Ly}\beta, \mathrm{Ly}\gamma, ... \qquad \text{Série de Lyman}$$
$$n = 3, 4, 5, ... \rightarrow 2 \qquad \mathrm{H}\alpha, \mathrm{H}\beta, \mathrm{H}\gamma, ... \qquad \text{Série de Balmer}$$

Les phases de l'ISM

• **Nébuleuses gazeuses : Equations d'équilibre statistique**
Coefficient de recombinaison d'un ensemble d'électrons à la température T vers le niveau n :

$$\alpha_n(T) = \int_0^\infty \sigma_n v f(v) dv \tag{447}$$

où $\sigma_n =$ section efficace de recombinaison du continu vers le niveau n.
A l'équilibre :

$$\alpha_n(T_e) N_e N_{H^+} + \sum_{n'=n+1}^{\infty} N_{n'} A_{n'n} + N_1 B_{1n} u_{\nu_{1n}} = \sum_{1}^{n''=n-1} N_n A_{nn''} \tag{448}$$

recomb. ($\mathrm{H}^+ + e^-$) + ém. ($\rightarrow n$) + abs photon ($1 \rightarrow n$) = ém. ($n \rightarrow$)

Les phases de l'ISM

- **Nébuleuses gazeuses : Equations d'équilibre statistique**

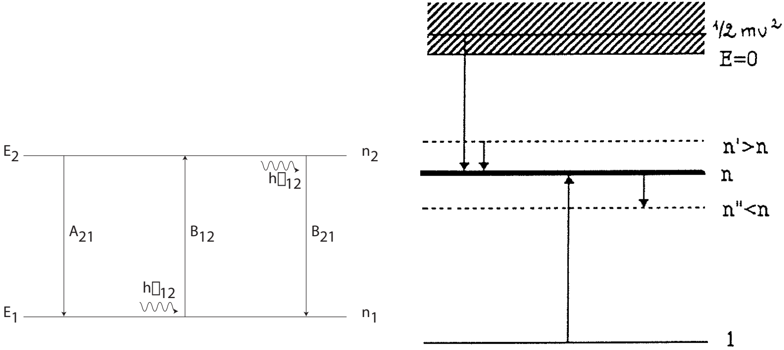


FIGURE: Coefficients d'Einstein et niveau d'excitation *n*

Les phases de l'ISM

- **Nébuleuses gazeuses : Equations d'équilibre statistique**

Origine du champ de rayonnement :

- rayonnement stellaire : négligeable, car très dilué
- photons de la série de Lyman ($\rightarrow$ $n = 1$).

$\rightarrow$ 2 cas extrêmes :

- Cas A : Nébuleuse optiquement mince dans les raies de recombinaison de Lyman
  $\rightarrow$ faible proba pour le photon Lyman provenant de la recombinaison ($\lambda < 912$Å) de rencontrer un autre atome d'H $\rightarrow$ les photons Lyman s'échappent de la nébuleuse
  $\rightarrow$ $N_1 B_{1n} u_{\nu_{1n}}$ négligeable.
  Equilibre statistique pour le niveau n :

$$\alpha_n(T_e) N_e N_{H^+} + \sum_{n'=n+1}^{\infty} N_{n'} A_{n'n} = \sum_{\mathbf{1}}^{n''=n-1} N_n A_{nn''} \qquad (449)$$

Les phases de l'ISM

- **Nébuleuses gazeuses : Equations d'équilibre statistique**
  - Cas B : Nébuleuse optiquement épaisse dans les raies de recombinaison de la série de Lyman.
    $\rightarrow$ Les photons Lyman absorbés sur place :
    $N_1 B_{1n} u_{\nu_{1n}} = N_n A_{n1}$
    Equilibre statistique pour le niveau n :

$$\alpha_n(T_e) N_e N_{H^+} + \sum_{n'=n+1}^{\infty} N_{n'} A_{n'n} = \sum_{\mathbf{2}}^{n''=n-1} N_n A_{nn''} \qquad (450)$$

Les phases de l'ISM

• **Nébuleuses gazeuses : Equations d'équilibre statistique**

La somme sur tous les niveaux n s'écrit :

$$\alpha_A(H, T_e) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{n,\ell} \tag{451}$$

$$\alpha_B(H, T_e) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{n,\ell} \tag{452}$$

Nombre total de recombinaison :

- Cas A : $n_e n_p \alpha_A(H, T_e)$ [cm^3 s^{-1}]
- Cas B : $n_e n_p \alpha_B(H, T_e)$ [cm^3 s^{-1}]

Les phases de l'ISM

- **Nébuleuses gazeuses : Sphère de Strömgren**

Hypothèses :

- Ionisation seulement par absorption du rayonnement de l'étoile ($\lambda < 912$Å)
- L'ionisation par collision est négligée (faible densité du gaz)
- Soit ν_0 la fréquence correspondant à $\lambda_0 = 912$Å ($h\nu_0 = 13.6$ eV) donc $\nu_0 = 3.3 \times 10^{15}$ Hz
- Gaz composé d'hydrogène, densité uniforme
- Recombinaison est beaucoup plus lente que désexcitation spontanée $\rightarrow$ atomes d'H dans leur état fondamental
- Dans la région H^+ l'hydrogène est entièrement ionisé
- La zone de transition H^+ - H est très mince
- Structure d'ionisation statique

Les phases de l'ISM

• **Nébuleuses gazeuses : Sphère de Strömgren**

Photoionisations et recombinaisons s'équilibrent :

$$n_{1s} \int_{\nu_1}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu}{h\nu}\, a_\nu(1s) d\nu = n_p n_e \alpha(T_e) \tag{453}$$

$a_\nu(n\ell) =$ section efficace de photo-ionisation
$J_\nu = \int I_\nu d\Omega/4\pi =$ intensité moyenne au point considéré
Cas B de la recombinaison :
Le nombre total de photons ionisant émis par une étoile de température T_* et de rayon R_* :

$$Q = \int_{\nu_1}^{\infty} \frac{4\pi R_*^2 \, \pi B_\nu(T_*)}{h\nu} d\nu \tag{454}$$

= nombre total de recombinaisons vers des états excités ($n > 1$) :

$$Q = \int n_p n_e \alpha_B dV \tag{455}$$

Les phases de l'ISM

• **Nébuleuses gazeuses : Sphère de Strömgren**
H est complètement ionisé jusqu'à un rayon critique R_S, appelé *rayon de Strömgren* :

$$r < R_S \qquad n_p = n_e = n_H \tag{456}$$

$$r > R_S \qquad n_p = n_e = 0 \tag{457}$$

$$\rightarrow \quad \text{Eq. 455 :} \quad Q = \frac{4}{3}\pi\, R_S^3\, n_H^2\, \alpha_B \tag{458}$$

Comme $B(T) = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} \frac{kT}{h} dx$ (Eq. 113) :

$$\rightarrow \quad \text{Eq. 454 :} \quad Q = \frac{8\pi^2 R_*^2}{c^2} \left(\frac{kT_*}{h}\right)^3 G(T_*) \tag{459}$$

avec : $G(T_*) = \int_{\frac{h\nu_1}{kT_*}}^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx$ (augmente avec T_*)

Les phases de l'ISM

• **Nébuleuses gazeuses : Sphère de Strömgren**

$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_*^4$ et $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$

$$\rightarrow \quad Q = \frac{15 G(T_*)}{\pi^4 k T_*} L_* \tag{460}$$

En remplaçant dans l'Eq. 458 :

$$R_S = \left[\frac{45 G(T_*) L_*}{4\pi^5 k T_* n_H^2 \alpha_B(T_e)} \right]^{\frac{1}{3}} \tag{461}$$

Exemple :
Etoile O8V, $T = 37\,000$K, $R_* = 10 R_\odot = 6.96 \times 10^{11}$ cm.
Intégration numérique $\rightarrow$ $N_i = 7.95 \times 10^{48}$ photons/s.
Avec $n_e = n_H = 1000$ et $\alpha_B = 2.59 \times 10^{-13} \mathrm{cm^3 s^{-1}}$ (cf Tab. **??**) :
$R_S = 1.93 \times 10^{18}$ cm ou 0.63pc.

Les phases de l'ISM

• **Nébuleuses gazeuses : Sphère de Strömgren**

Remarques :

- Si type spectral et densité connue : comparaison R_S / étendue angulaire $\rightarrow$ distance
- Si la source du rayonnements = noyau actif de galaxie (AGN), alors spectre d'un AGN (= loi en puissance) au lieu de la fonction de Planck dans l'Eq. 454
- Idem : structure d'ionisation de la nébuleuse pour He et pour les éléments lourds.

Chap. 8 : Variation des constantes fondamentales

Variation des constantes fondamentales

- Ce n'est pas (plus) un sujet tabou α, G, μ, etc...

J.P. Uzan, Rev. Modern Physics, 75, 403, 2003 : The fundamental constants and their variation : observational and theoretical status

Constante de structure fine (couplage entre photons et particules chargées) :

$$\alpha = \frac{q^2}{\hbar c} \approx 1/137.03599976(50) \tag{462}$$

avec

$$q^2 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \tag{463}$$

Quasars : objets astronomiques les plus éloignés observables
Raies spectrales observées dans le spectres de quasars situés à différentes distances
$\rightarrow$ tester la variabilité temporelle de la constante de la structure fine.

Variation de la constante de structure fine

- **Spectres de quasars**
  - $\exists$ nuages intergalactiques situés à différentes distances entre le quasar et nous
  - Raies en absorption produites par des métaux présents dans ces nuages
  - Raie Λ avec structure fine : deux composantes λ_1 et λ_2 (doublet)
  - Différence entre spectre observé et spectre de laboratoire :
    - redshifted (= décalé vers le rouge)
    - Si variation de $|\lambda_1 - \lambda_2|$ alors variation de α !

Décalage spectral (Redshift)

$$1 + z \equiv \frac{a_0}{a(t)} = \frac{\lambda_{\rm obs}}{\lambda_0} \qquad (464)$$

$a(t) \stackrel{def}{=}$ facteur d'échelle à l'époque où l'objet a émis la lumière qui nous parvient
$a_0 \stackrel{def}{=}$ valeur actuelle du facteur d'échelle
$L(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} L_0$
$t =$ temps cosmique ($\neq$ temps propre)
$L_0 \stackrel{def}{=}$ distance à t_0 entre 2 objets dont les coordonnées comobiles sont fixes
La distance d'une galaxie est donnée par :

$$d = \frac{c\,z}{H_0} \qquad (465)$$

$H_0 = 72 \pm 8 \mathrm{km\ s^{-1} Mpc^{-1}}$ (Freedman et al. 2001) est la constante de Hubble.

Variation de la constante de structure fine

Ecart en fréquence entre les deux raies de structure fine d'un doublet (cf cours de MQ) :

$$\Delta\nu = \frac{\alpha^2 Z^4 R_\infty}{2n^3} \quad \mathrm{cm}^{-1} \tag{466}$$

Soit :

- Δ l'écart entre les 2 raies du doublet
- d la dérivée de la grandeur considérée en fonction du décalage spectral z

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \propto \alpha^2 \tag{467}$$

$$d\left(\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}}\right) = 2\alpha\, d\alpha \tag{468}$$

$$\frac{d\left(\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}}\right)}{\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}}} = \frac{2d\alpha}{\alpha} \tag{469}$$

Variation de la constante de structure fine

Or :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{470}$$

$$d\nu = -c\,\frac{d\lambda}{\lambda^2} \tag{471}$$

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{d\lambda}{\lambda} = -d(\ln\lambda) \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\Delta(\ln\lambda) \tag{472}$$

Donc :

$$\frac{d(\Delta\ln\lambda)}{\Delta\ln\lambda} = \frac{2d\alpha}{\alpha} \tag{473}$$

$$\frac{(\Delta\ln\lambda)_z - (\Delta\ln\lambda)_0}{(\Delta\ln\lambda)_0} = \frac{2d\alpha}{\alpha} \tag{474}$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\Delta\lambda}{\bar{\lambda}}\right)_z}{\left(\frac{\Delta\lambda}{\bar{\lambda}}\right)_0} - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}\right)_z}{\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}\right)_0} - 1\right] \tag{475}$$

Variation de la constante de structure fine

- **Exemple de raies utilisées :**
  - raies en émission : [O III] doublet (4960, 5008 Å), [Ne III] doublet (λ 3869, 3968 Å), [Si II] (λ 6719, 6733 Å)
  - raies en absorption : Si IV (λ1394, 1403 Å)

Exemple d'un système à 6 électrons (CI, NII, OIII, FIV, NeV).
Configuration fondamentale $1s^2 2s^2 2p^2$
Parité paire ($\Pi_i(-1)^{\ell_i}$ =1).

- $1s^2$ et $2s^2$: couches fermées
- $2p$ est partiellement remplie.

3 configurations possibles ${}^{2S+1}\mathcal{L}_J^p$:

- ${}^3P$ (i.e. $L = 1, S = 1$) $\rightarrow$ niveaux fins ($|L - S| < J < |L + S|$) : ${}^3P_{0,1,2}$
- ${}^1D$ (i.e. $L = 2, S = 0$) (singulet car spin 0, donc J=L=2)
- ${}^1S$ (i.e. $L = 0, S = 0$) (singulet aussi).

${}^1D_2 \rightarrow {}^3P_1$ et ${}^1D_2 \rightarrow {}^3P_2$ $\rightarrow$ doublet $\lambda_1 = 4960.295$Å, $\lambda_2 = 5008.240$Å dans OIII.

Variation de la constante de structure fine

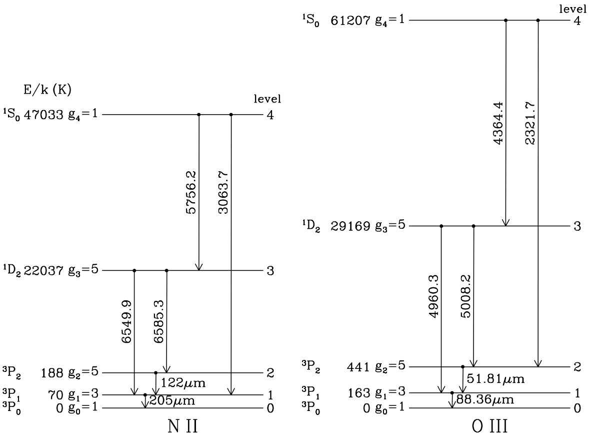


Figure 4.1 Energy-level diagram for the ground configuration of the $2p^2$ ions N II and O III. (Fine-structure splitting is exaggerated for clarity.) Forbidden transitions connecting these levels are shown, with wavelengths in vacuo.

FIGURE:

Variation de la constante de structure fine

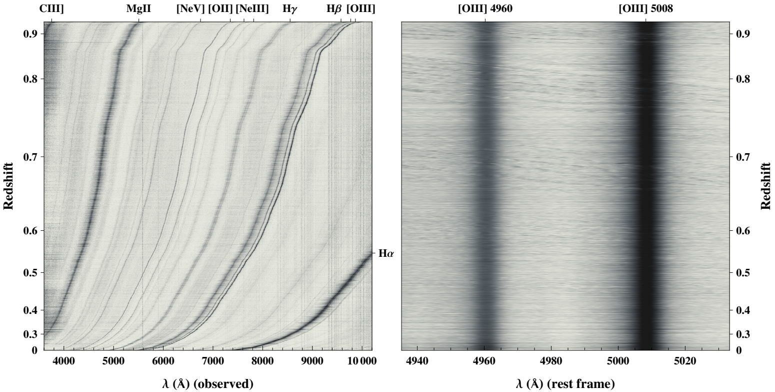


Figure 3. Composite image with our fiducial sample of 10 363 BOSS quasar spectra sorted by redshift. Left-hand panel: the whole range of wavelengths is shown. From right to left, the strongest emission lines are H α 6565 Å; [O III] $\lambda\lambda$ 4960, 5008 Å; H β 4861 Å; H γ 4341 Å; [Ne III] $\lambda\lambda$ 3869, 3968 Å; [O II] 3730 Å; [Ne V] 3426 Å; Mg II 2796 Å and C III] 1906 Å. The narrow straight line at 5579 Å is the strong [O I] atmospheric line. Right-hand panel: wavelength interval centred at the [O III] doublet in rest frame.

FIGURE: Albareti et al., 2015, MNRAS 452, 4153

Variation de la constante de structure fine

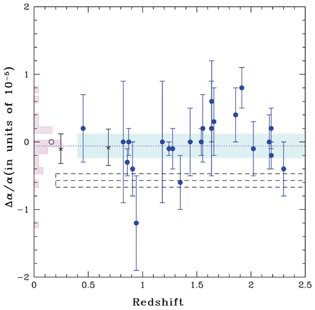


FIGURE: Mesures de la variation relative de α en fonction du décalage spectral (redshift) et donc du temps inversé. Cercle = mesure provenant du réacteur naturel d'Oklo et les étoiles proviennent de spectres UVES (VLT) de quasars lointains impliquant des raies moléculaires. Traits interrompus = zone de variation de α telle qu'annoncée par Murphy et al. (2003). Mesures UVES : incompatibles avec une telle variation de la constante de structure fine.