Atelier Astro-Math
CCS ULB Parentville

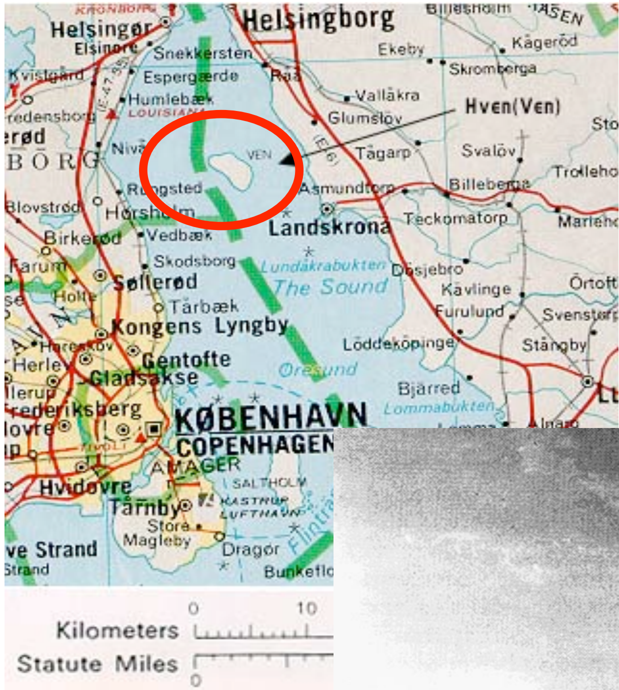
Comment peser étoiles et planètes?

Alain Jorissen

23/10/2007

Mouvements planétaires:

nouvelles observations   Tycho Brahe   (1546 - 1601)



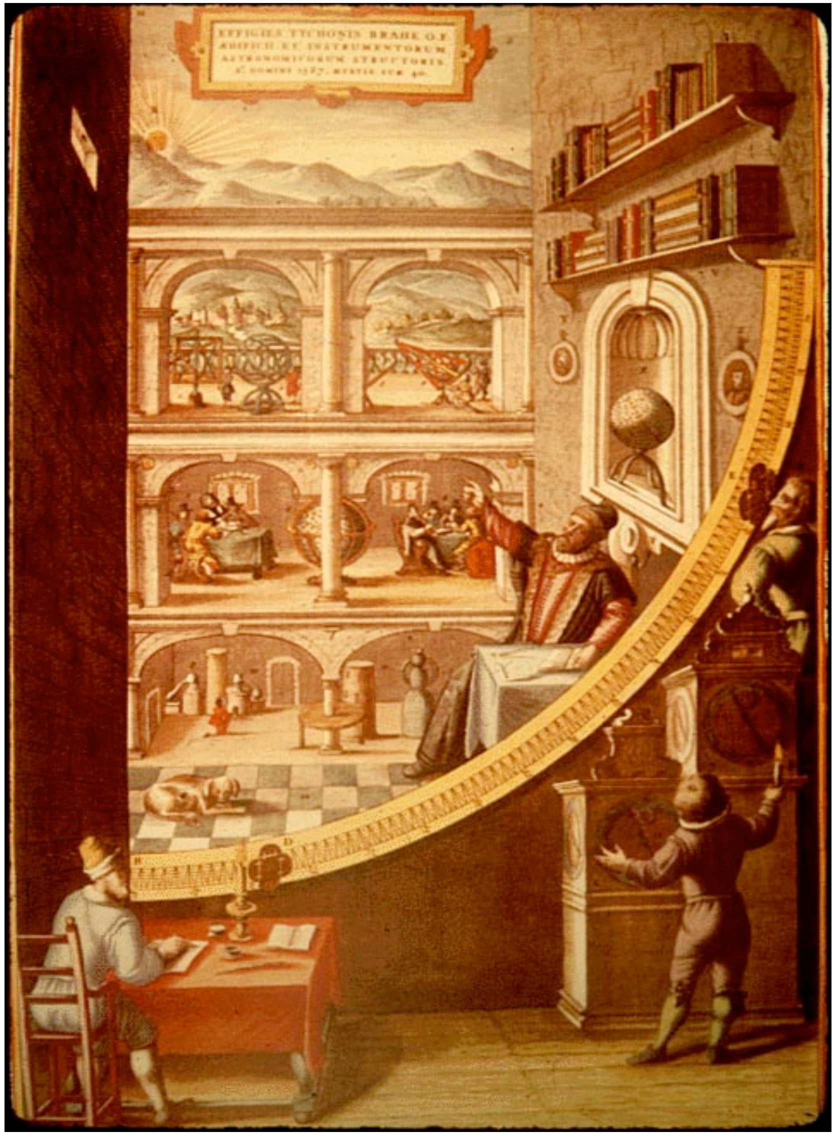
Ile de Hven

Uraniborg

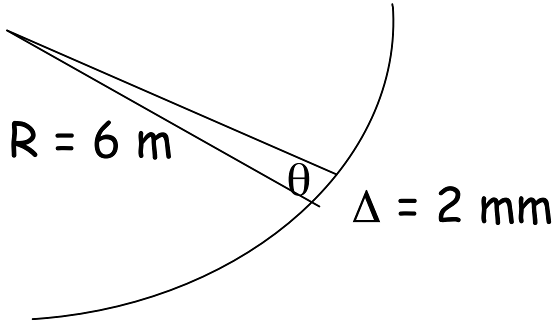
Tycho Brahe: le dernier astronome pré-télescopique

Mouvements planétaires:

nouvelles observations   Tycho Brahe   (1546 - 1601)



Construction du château-observatoire Uraniborg, doté des meilleurs instruments de visée à l'œil nu, comme un grand quadrant mural, de 6 m de rayon.



$\mathrm{tg}\,\theta = \Delta / R$

$\rightarrow \theta = 1'$,

soit 1/30 du diamètre de la Pleine Lune, une précision jamais atteinte jusque là!

Tycho Brahe: le dernier astronome pré-télescopique

Les lois des mouvements planétaires Johannes Kepler (1571 - 1630)

Tycho lègue ses observations à J. Kepler qui parvient à en extraire
3 lois du mouvement planétaire (« Lois de Kepler »)

1ere loi (1609): les orbites planétaires sont des courbes planes, fermées de type elliptique dont le Soleil occupe un des foyers

Johannes Kepler (1571-1630).

Ellipse = lieu des points dont
la somme des distances
à deux points fixes (« foyers » F, F')
est une constante
(soit 2 a = PA, la longueur du « grand-axe »)

L'ellipse est entièrement définie par 2 nombres:

Le demi grand-axe a

L'excentricité e

= écart au cercle: e = CF / PC

Deux points particuliers: P = périhélie

A = aphélie

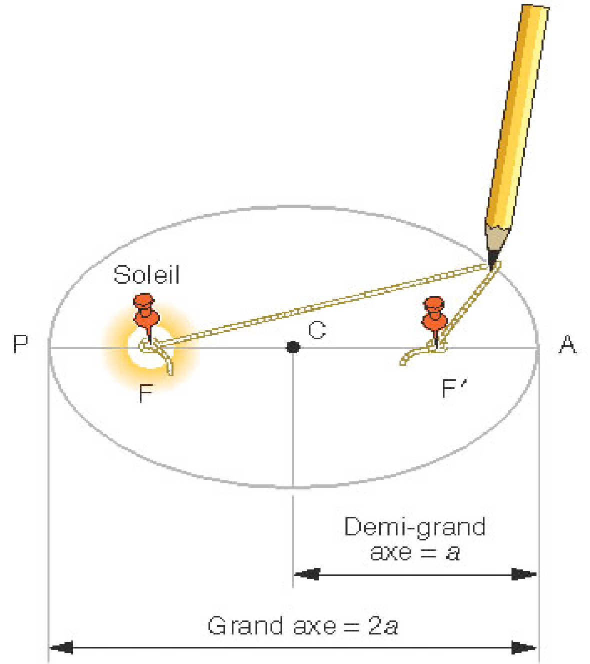


Figure 3.2

Les lois des mouvements planétaires   Johannes Kepler (1571 - 1630)

2eme loi (1609): le rayon-vecteur balaie des aires égales en des durées égales

Johannes Kepler (1571-1630).

- L'inégalité des saisons,
- La préférence zodiacale
  enfin expliquées !

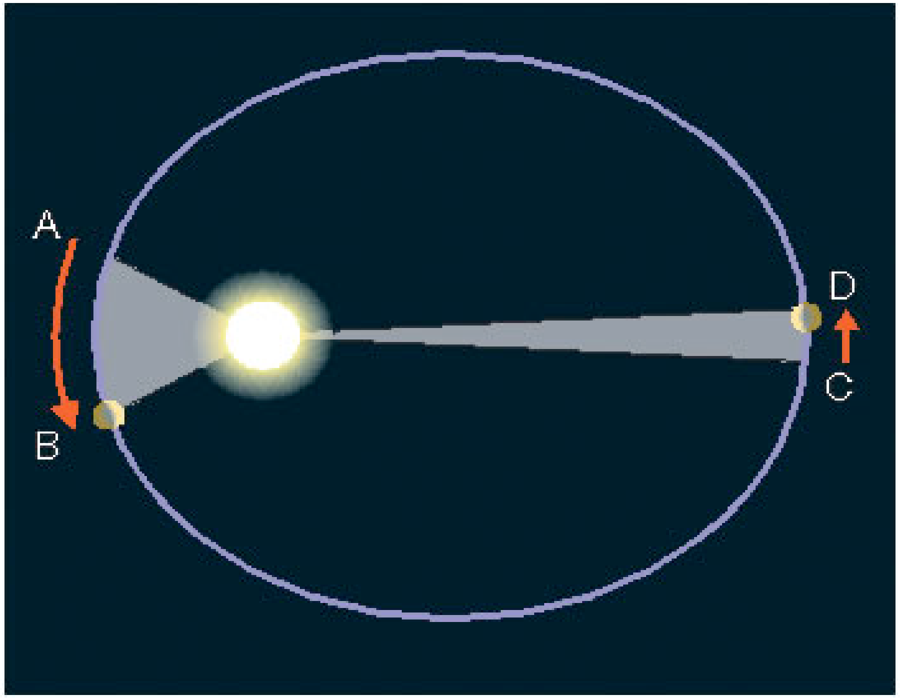
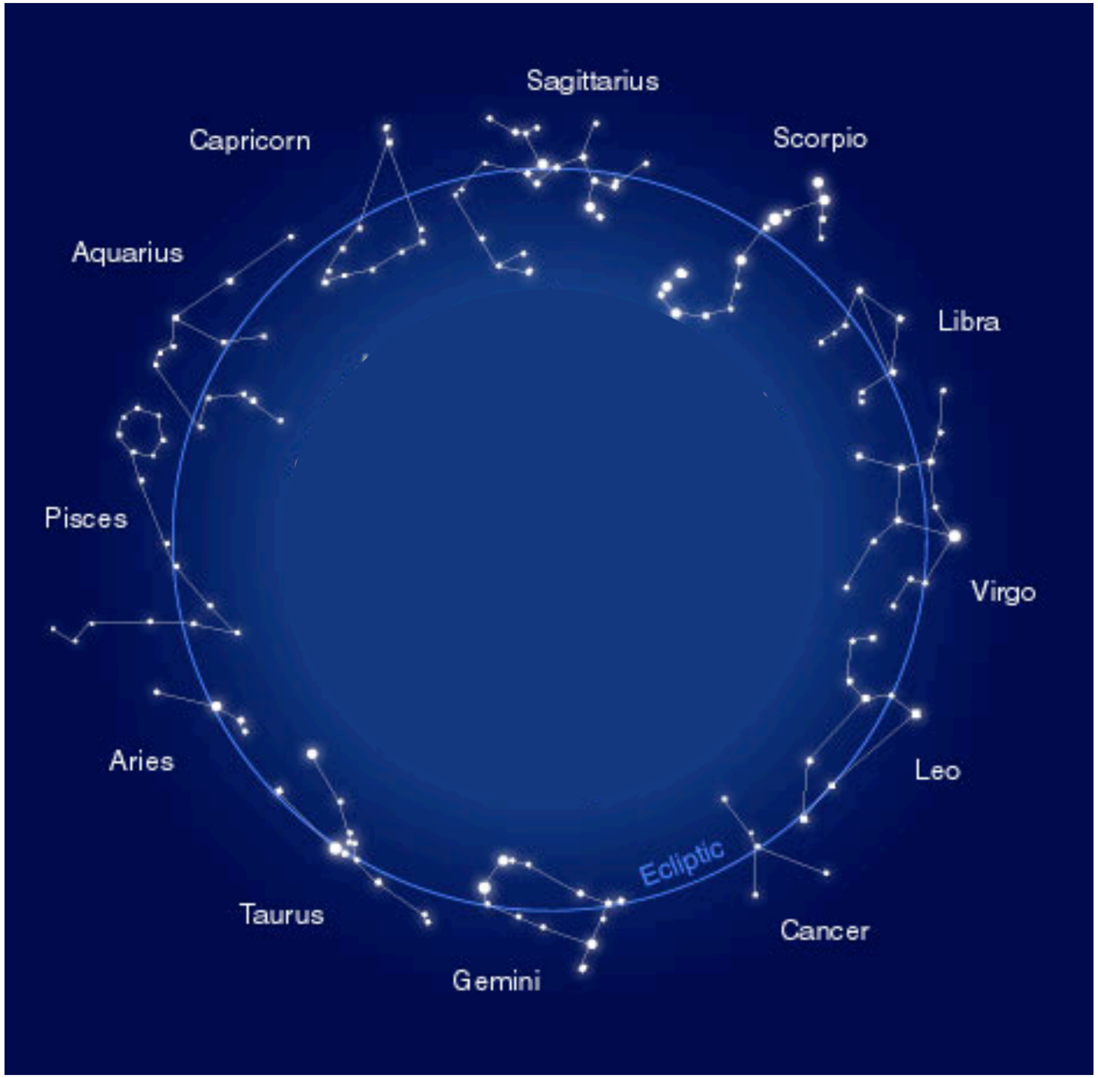


Figure 3.4

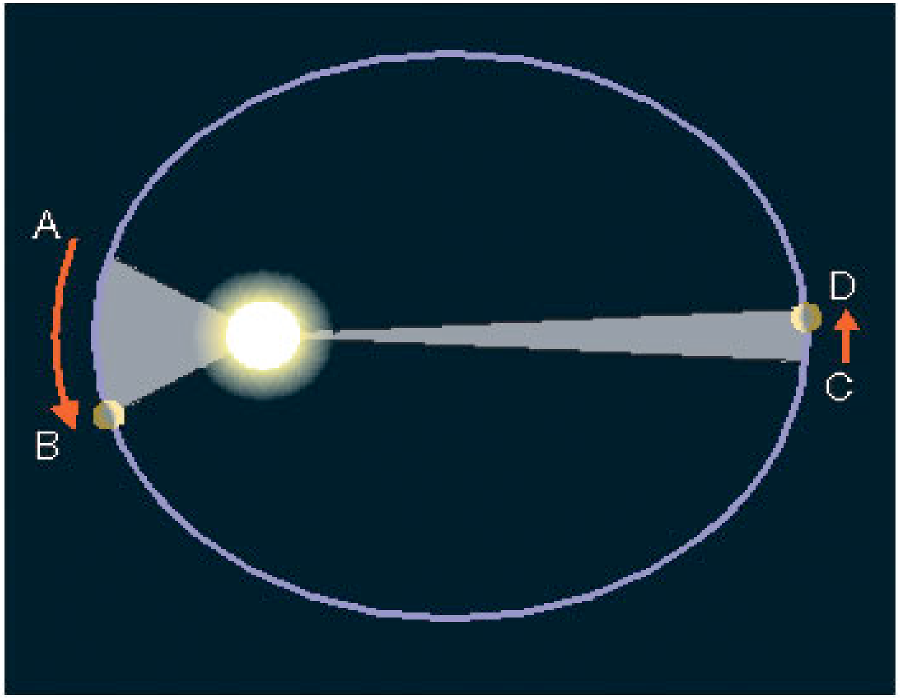
Les lois des mouvements planétaires   Johannes Kepler (1571 - 1630)

2eme loi (1609): le rayon-vecteur balaie des aires égales en des durées égales



- L'inégalité des saisons,
- La préférence zodiacale

enfin expliquées !



Les lois des mouvements planétaires Johannes Kepler (1571 - 1630)

3eme loi (1618): le rapport a^3/ P^2_{orb} est identique pour toutes les planètes (tournant autour du Soleil)

Rem: 1 UA = demi grand-axe de l'orbite terrestre
= 149.6 10^6 km

Compléter les colonnes laissées vides


Johannes Kepler (1571-1630).

	P_{orb} (j)	a (10^6km)	a^3/ P^2	P_{orb} (an)	a (UA)	a^3/ P^2
Lune	27.322	0.3844	..	0.075	0.00257	..
Mercure	87.968	57.91	..	0.24	0.387	..
Vénus	224.695	108.21	..	0.62	0.723	..
Terre	365.242	149.6	..	1	1	..
Mars	686.93	227.94	..	1.88	1.524	..
Jupiter	4330.6	778.30	..	11.86	5.203	..
Saturne	10446.94	1429.39	..	29.46	9.54	..
Uranus	30588.7	2875.04	..	83.74	19.2184	..
Neptune	59799.9	4504.50	..	163.7232	30.11	..

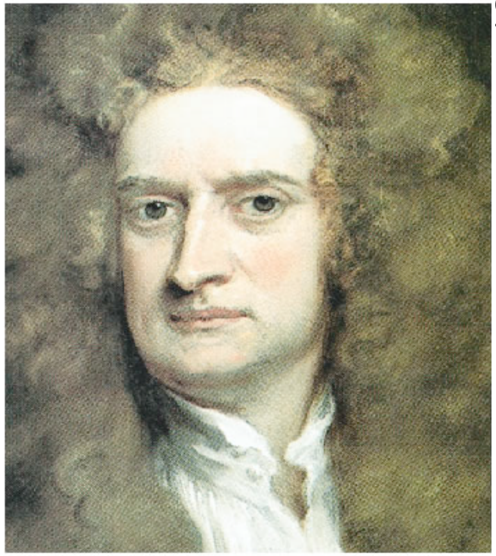
La loi de la gravitation universelle Isaac Newton (1642 - 1727)

Des trois lois de Kepler, Newton déduit (Principia 1687)
la forme analytique de la force de la gravitation:

Sachant que pour qu'une orbite soit stable,
l'accélération centripète dans une orbite circulaire de rayon (relatif*) a :

$g_{centripète} = v^2_{orb} / a$ (* càd de l'une des masses % à l'autre)

doit être égale à l'accélération associée à la force de gravité:



Isaac Newton (1642-1727).

$g_{gravité} = G\,(M + m)\ f(a)$, G = constante de la gravitation universelle

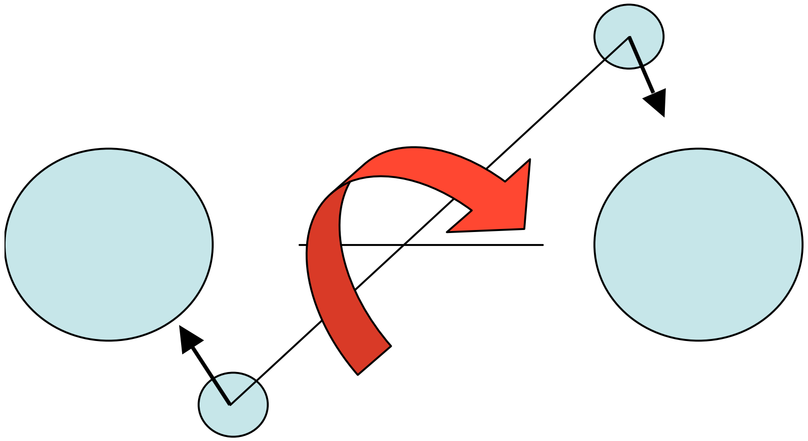
Déterminer la fonction f(a) qui reproduit la 3e loi de Kepler

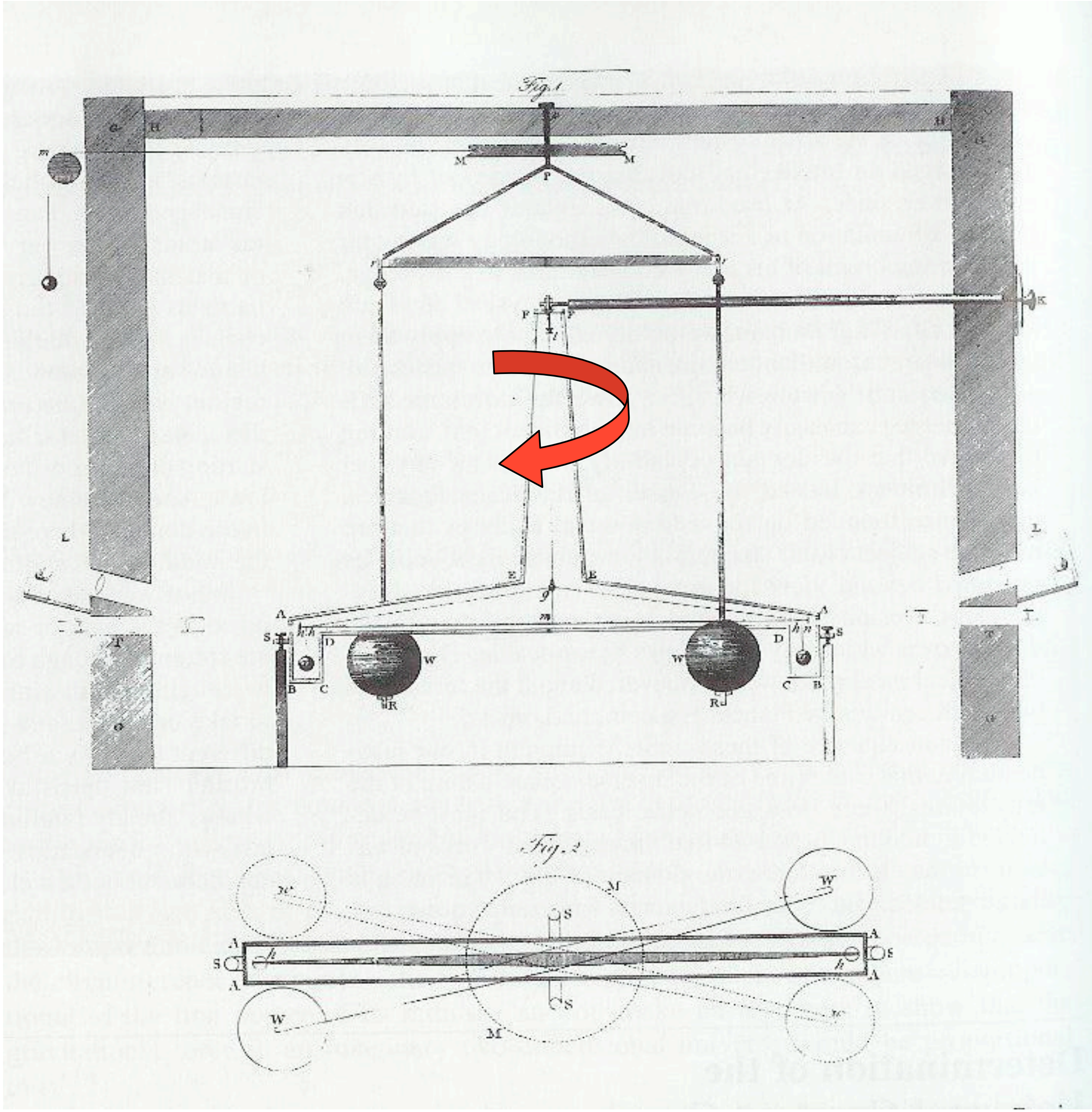
$$\boxed{a^3 / P^2 = G\,(M+m) / 4\pi^2}$$

Mesure de G :

Henry Cavendish (1731 - 1810)

Pendule de torsion





$$G = 6.67\ 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$$

Masse du Soleil

Sachant que $G = 6.67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
et que le rayon de l'orbite de la Terre = $149.6\ 10^6$ km,

déterminer la masse du Soleil en kg

Pourquoi pour la Lune $a^3/ P^2 = 3\ 10^{-6}$ (en unités UA^3/an^2)
et non 1 comme pour toutes les autres planètes?

Masse de la Terre

En exprimant la 3e loi de Kepler pour le système Terre-Lune
et ensuite pour le système Terre-Soleil,
déterminer la masse de la Terre.

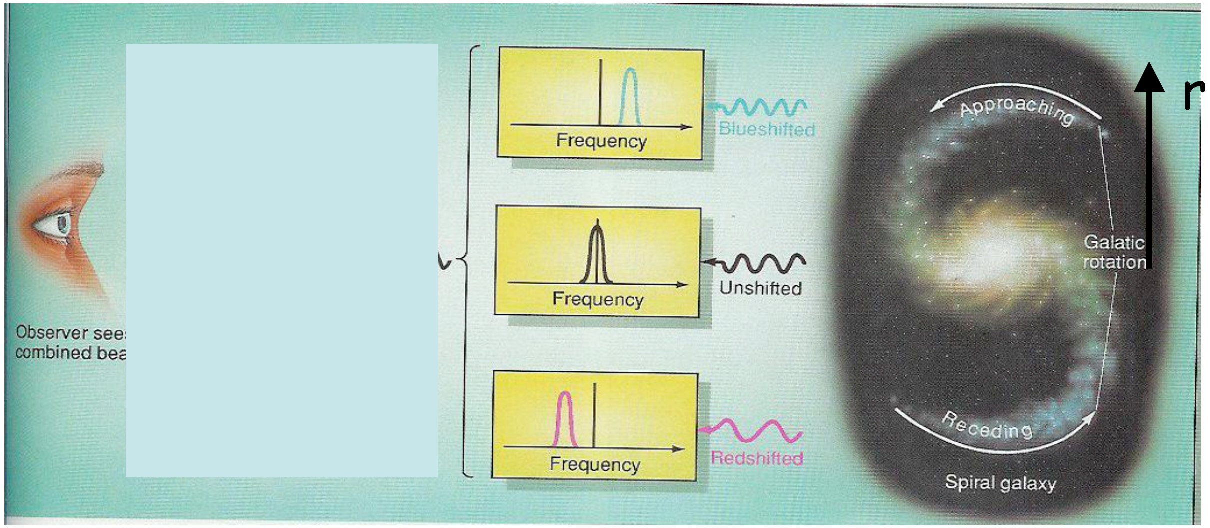
Masse de Jupiter

Déterminer la masse de Jupiter sachant que son satellite Io orbite à une distance de 421 600 km en 1.769 jours

La masse des galaxies (I)

Mesure de la vitesse radiale
par effet Doppler

$V_{rot} / c = (\lambda_{obs} - \lambda_0) / \lambda_0$



Si la masse d'une galaxie était
principalement concentrée dans son bulbe (comme suggéré par son fort éclat),
la vitesse de rotation de la galaxie (à la distance r du centre) s'exprimerait par:

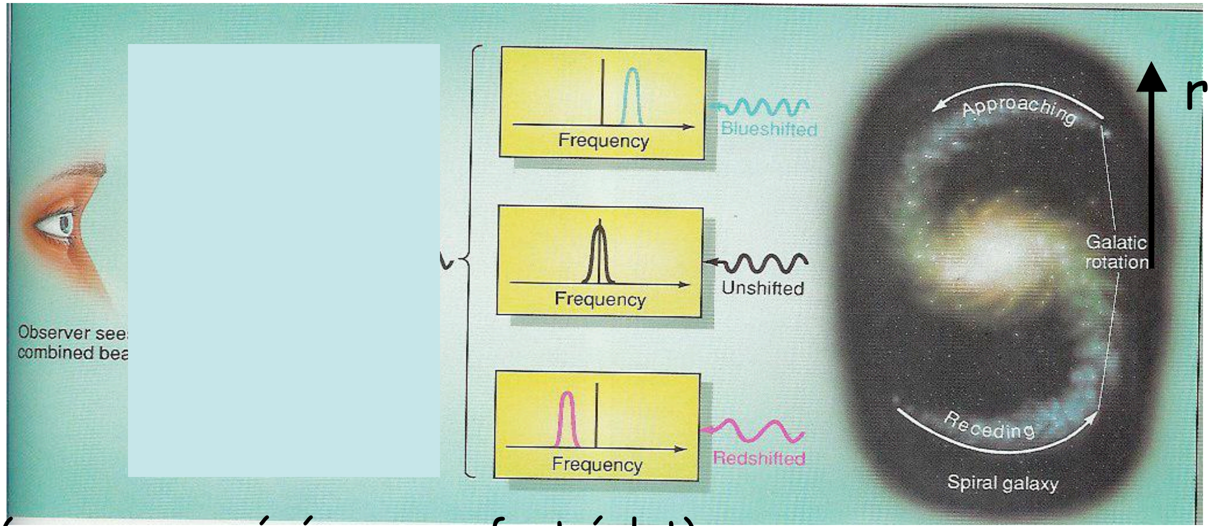
$V = 2\pi \, r / P$ (module de la vitesse dans une orbite circulaire)

$r^3 / P^2 = G \, M_{noyau} / 4 \, \pi^2$ (3e loi de Kepler)

➛ $V_{rot}(r) = [\, G \, M_{noyau} / r \,]^{1/2}$

La masse des galaxies (II)

Mesure de la vitesse radiale
par effet Doppler



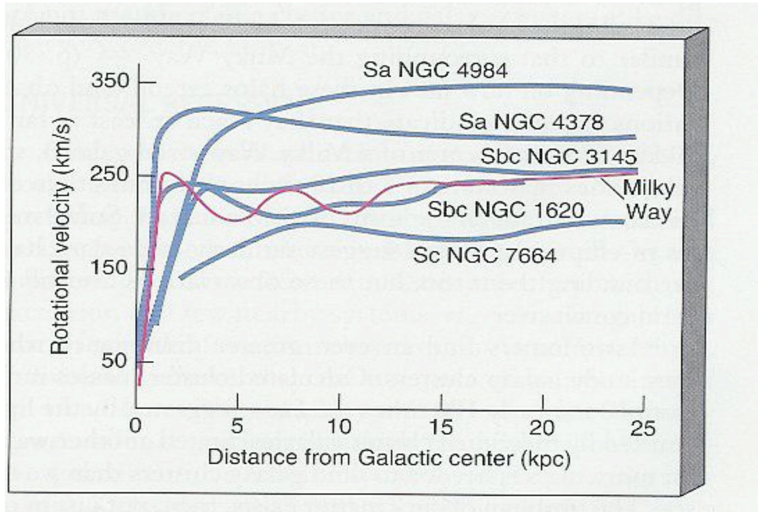
$V_{rot} / c = (\lambda_{obs} - \lambda_0) / \lambda_0$

Si la masse d'une galaxie était
principalement concentrée dans son bulbe (comme suggéré par son fort éclat),
la vitesse de rotation de la galaxie (à la distance r du centre) s'exprimerait par:

$V = 2\pi r / P$ (module de la vitesse dans une orbite circulaire)

$r^3 / P^2 = G M_{noyau} / 4 \pi^2$ (3e loi de Kepler)

➛ $V_{rot}(r) = [G M_{noyau} / r]^{1/2}$



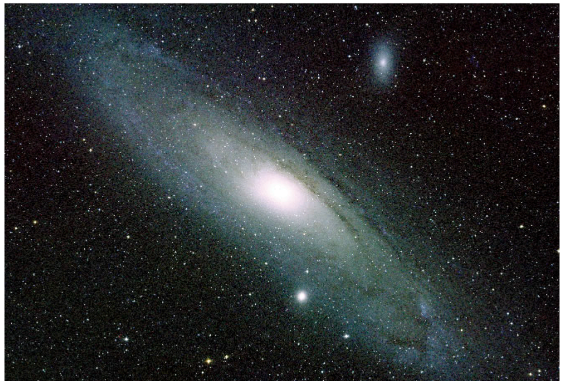
Les courbes de rotation sont plates!

La masse des galaxies (III)

➛ $V_{rot}(r) = [\, G\, M(r) / r\,]^{1/2}$ où $M(r) = M_{noyau}$ d'après l'aspect de la galaxie en lumière visible

➛ La vitesse de rotation doit décroître comme $r^{-1/2}$

Ce n'est pas le cas ! Les courbes de rotation sont plates!



Deux possibilités:

- Il existe de la matière non-lumineuse

  [telle que $M(r) \propto r$, soit $V(r)$ = constante]

  Quelle est la nature de cette matière?

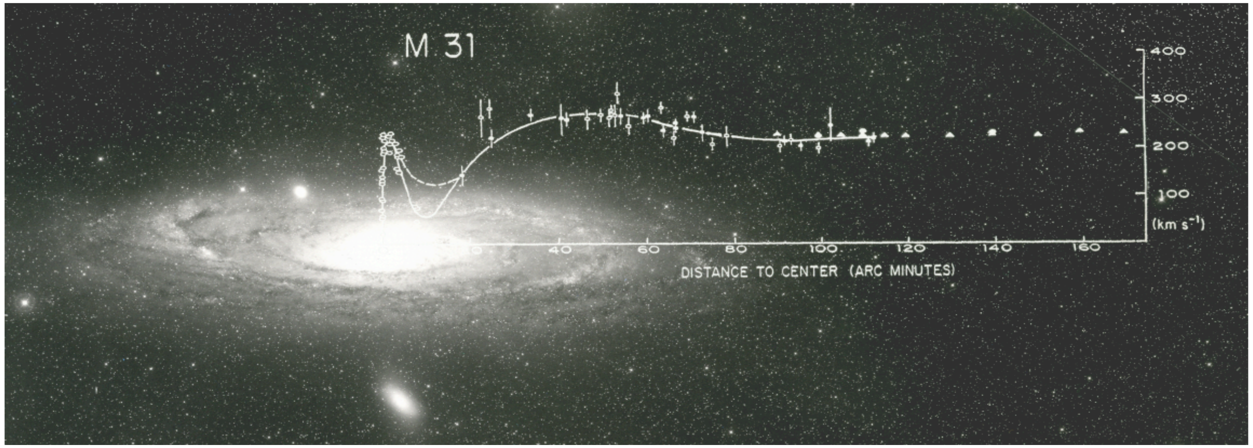
  - objets compacts?

    trous noirs, étoiles à neutrons, naines blanches, naines brunes...

    NON : pas suffisant!

  - particules élémentaires exotiques?

- La loi de la gravitation n'est pas valable à ces échelles



La masse des galaxies (IV)

➛ $V_{rot}(r) = [G M(r) / r]^{1/2}$ où $M(r) = M_{noyau}$ d'après l'aspect de la galaxie en lumière visible

Ex: Masse de la Galaxie:

1. Estimation masse dynamique

Il existe des nuages de gaz en orbite à 100 000 a-l du centre de la Galaxie (soit deux fois plus loin que la limite du disque d'étoiles). La vitesse circulaire de ces nuages est 270 km/s.

La masse dynamique de la Voie Lactée est donc de $\boxed{5.2\ 10^{11}\ M_\odot}$

2. Estimation masse lumineuse

En extrapolant à partir de la portion de la Galaxie directement observable, on évalue la luminosité totale de la Galaxie à $25\ 10^9\ L_\odot$.

Si toutes les étoiles de la Galaxie étaient identiques au Soleil, on en déduirait une masse de $25\ 10^9\ M_\odot$.

Ce n'est pas le cas: on estime que la Galaxie est peuplée principalement d'étoiles moins massives et moins lumineuses que le Soleil, dont le rapport L/M = 1/4.

La masse lumineuse de la Galaxie s'élève donc à $100\ 10^9\ M_\odot$, soit $\boxed{10^{11}\ M_\odot}$

La masse des galaxies (V)

➛ ~~$V_{rot}(r) = [\, G\, M(r) / r\,]^{1/2}$~~ où $M(r) = M_{noyau}$ d'après l'aspect de la galaxie en lumière visible

Ex: Masse de la Galaxie:

1. Estimation masse dynamique

Il existe des nuages de gaz en orbite à 100 000 a-l du centre de la Galaxie (soit deux fois plus loin que la limite du disque d'étoiles). La vitesse circulaire de ces nuages est 270 km/s.

La masse dynamique de la Voie Lactée est donc de $\boxed{5.2\ 10^{11}\ M_{\odot}}$

2. Estimation masse lumineuse

En extrapolant à partir de la portion de la Galaxie directement observable, on évalue la luminosité totale de la Galaxie à 25 $10^9\ L_{\odot}$.

La masse lumineuse de la Galaxie s'élève donc à $100\ 10^9\ M_{\odot}$, soit $\boxed{10^{11}\ M_{\odot}}$

C'est vraisemblablement la formule ci-dessus, déduite de la loi de la gravitation via la 3e loi de Kepler, qui est incorrecte

➛ MOND = « Modified Newtonian Dynamics »

La masse des galaxies (VI)

➛ ~~$V_{rot}(r) = [\, G\, M(r) / r\,]^{1/2}$~~ où $M(r) = M_{noyau}$ d'après l'aspect de la galaxie en lumière visible

Ex: Masse de la Galaxie:

1. Estimation masse dynamique: **$5.2\ 10^{11}\ M_\odot$**
2. Estimation masse lumineuse: **$10^{11}\ M_\odot$**

C'est vraisemblablement la formule ci-dessus, déduite de la loi de la gravitation via la 3e loi de Kepler, qui est incorrecte

➛ MOND = « Modified Newtonian Dynamics »

Depuis 1982, suggestion que $F = m_p\, [a_0 \;\; G\, M_S / r^2]^{1/2}$

lorsque $F_{newton} / m_p < a_0 = 1.2\ 10^{-8}$ cm s^{-2} Rem: $g = 9.81$ m s^{-2}

Très sérieusement considérée ces derniers mois,
à la place de la matière sombre des galaxies!

La masse des galaxies (VII)

Amas de galaxies et lentilles gravitationnelles

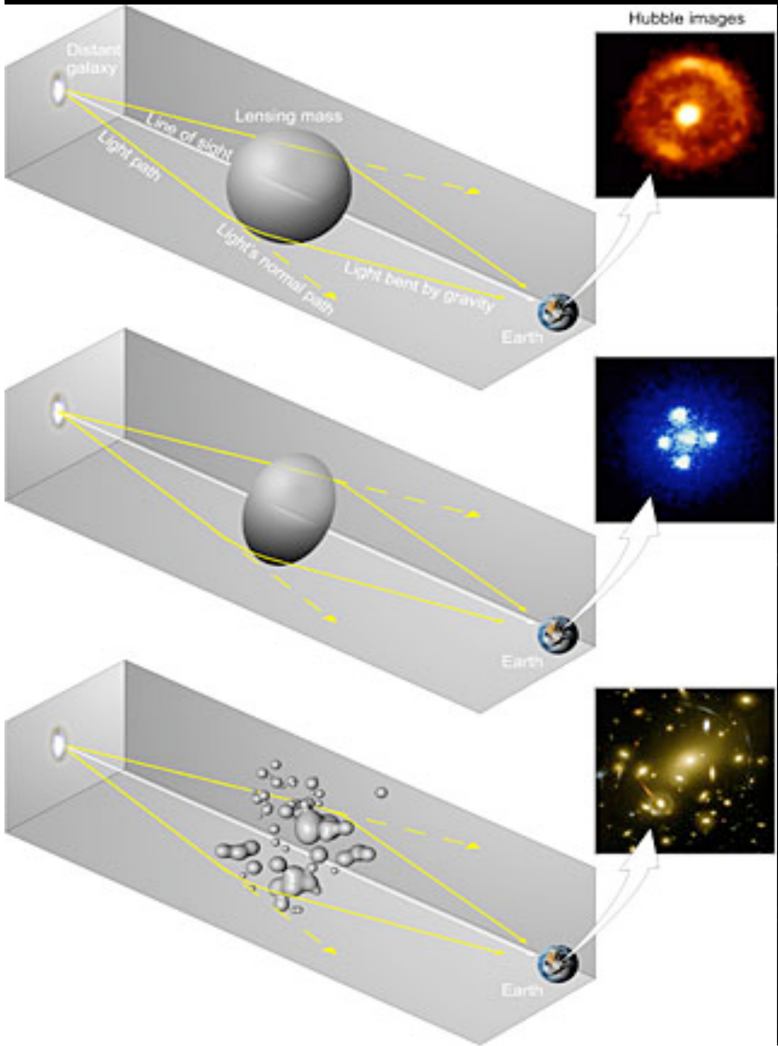
Galaxy Cluster Abell 2218

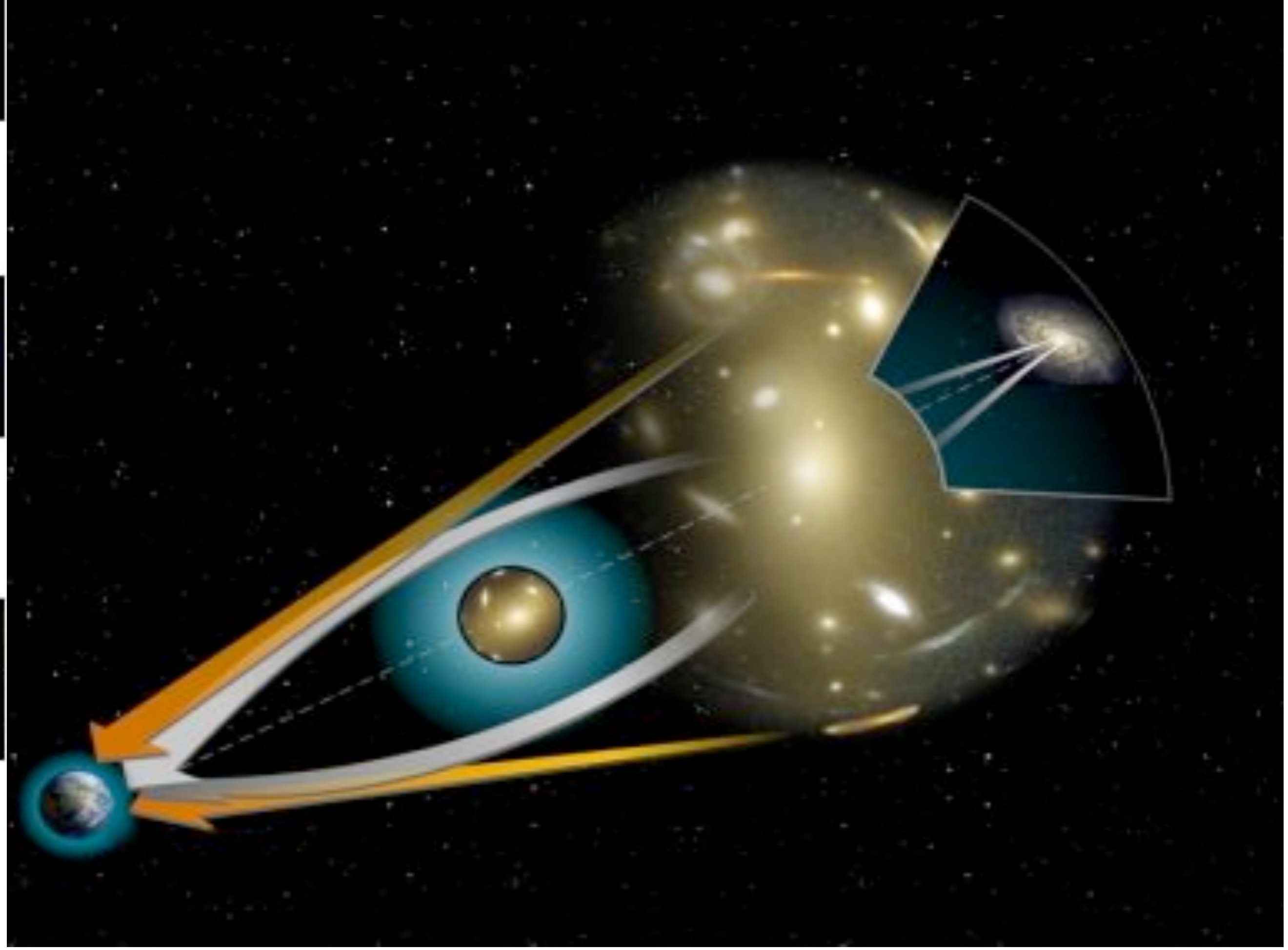
Hubble Space Telescope • WFPC2

NASA, A. Fruchter and the ERO Team (STScI, ST-ECF) • STScI-PRC00-08

La masse des galaxies (VIII)

Amas de galaxies et lentilles gravitationnelles

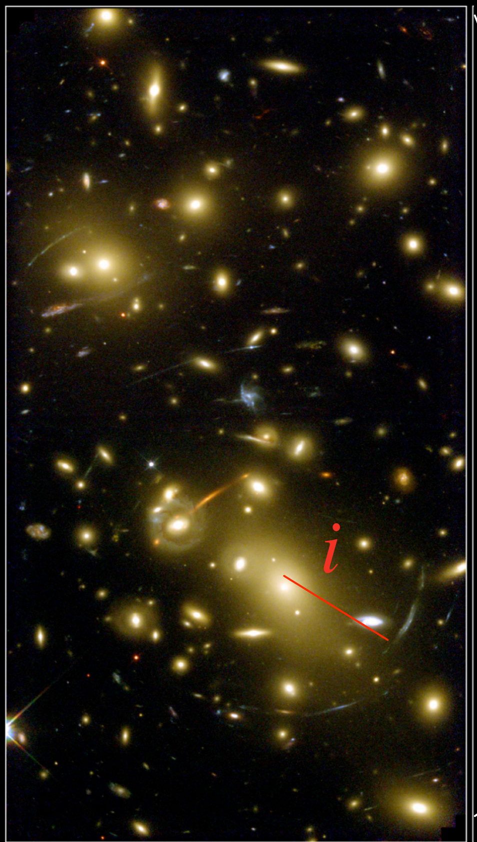


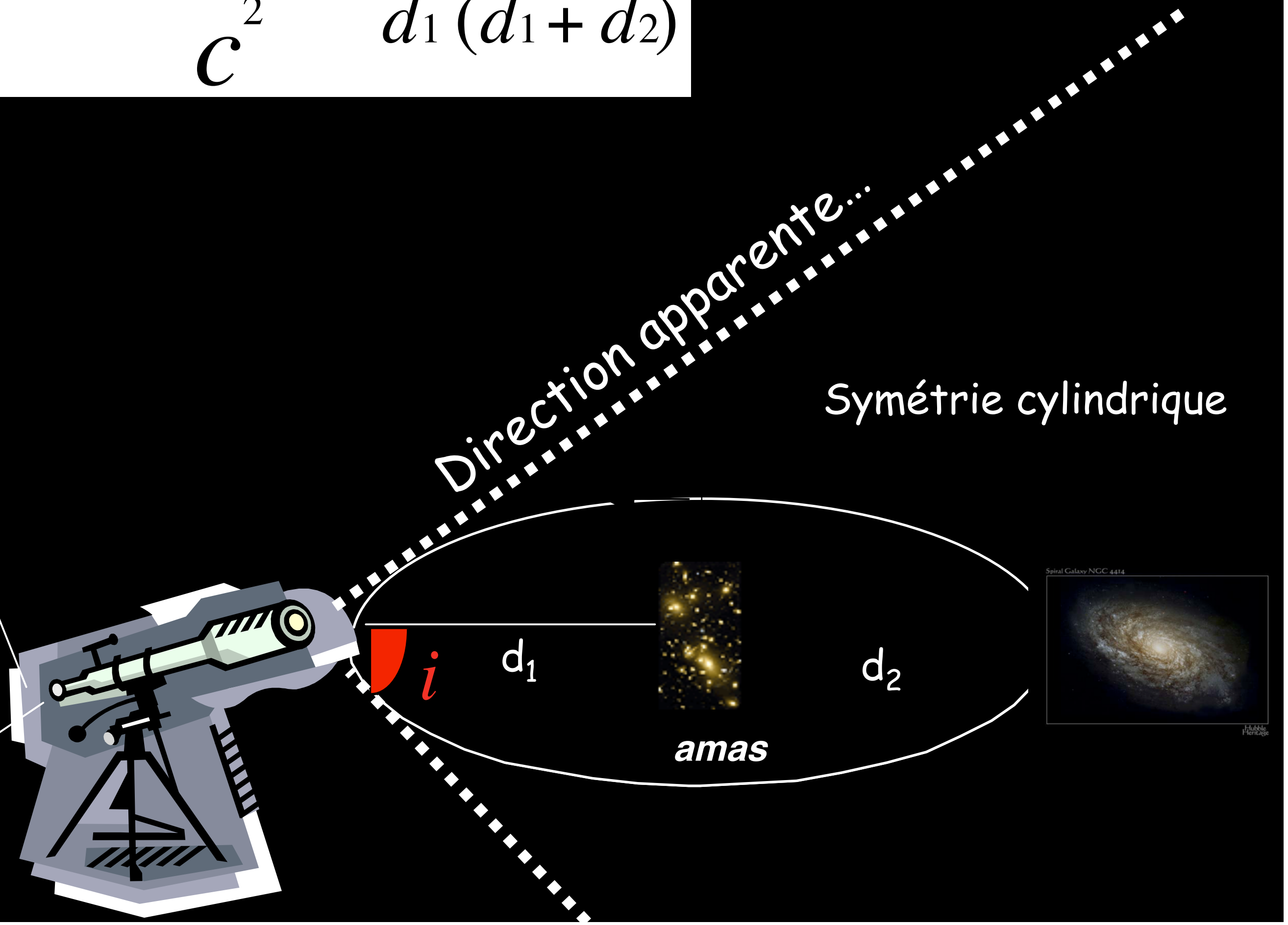


La masse des galaxies (IX)

Amas de galaxies et lentilles gravitationnelles

$$i^2 = \frac{4GM_{\mathrm{amas}}}{c^2}\,\frac{d_2}{d_1\,(d_1 + d_2)}$$



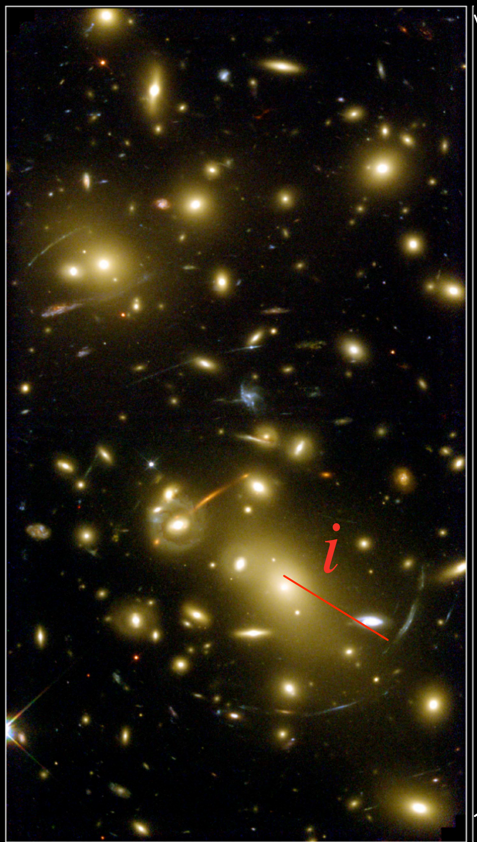


La masse des galaxies (X)

Amas de galaxies et lentilles gravitationnelles

Ici aussi, les masses de l'amas déduites de la formule relativiste et de la comptabilisation de la matière visible sont en désaccord, et semblent requérir de grandes quantités de matière sombre.

Cependant, il existe depuis mars 2004 une généralisation relativiste de MOND qui rétablit l'accord !



$$i^2 = \frac{4GM_{amas}}{c^2} \, \frac{d_2}{d_1\,(d_1 + d_2)}$$